

Le GPS et les sciences de la Terre

15 Novembre 2013



Plan de la conférence

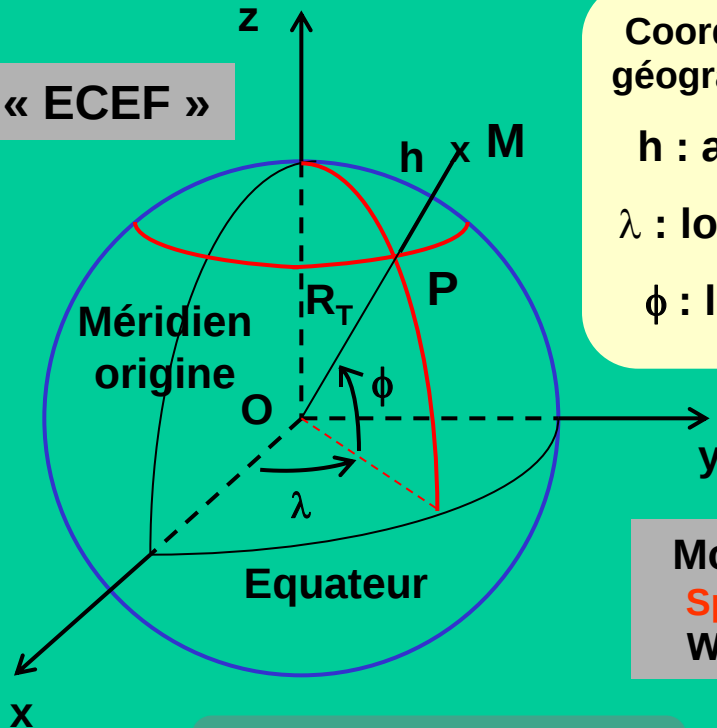


- I. Le principe du GPS
- II. Un récepteur « standard »
- III. La précision du positionnement
- III. Au delà de la précision métrique ...



Positionnement sur Terre

« ECEF »



Coordonnées géographiques

h : altitude

λ : longitude

ϕ : latitude

Modèles :

Sphère

WGS84 ...

$$(x, y, z) \Leftrightarrow (h, \lambda, \phi)$$

NAVIGATION

Hier :



Sextant



Chronomètre

Aujourd'hui et demain :



Récepteur GPS

Une histoire d'horloge ...

Mesure de la longitude (XVIII^{ème})

Horloges mécaniques



**John Harrison
(1693-1776)**



0,3 s/jour

Positionnement global (XX^{ème}- XXI^{ème} siècle)

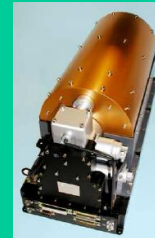
Horloges atomiques

Oscillateur à quartz

1978



2013

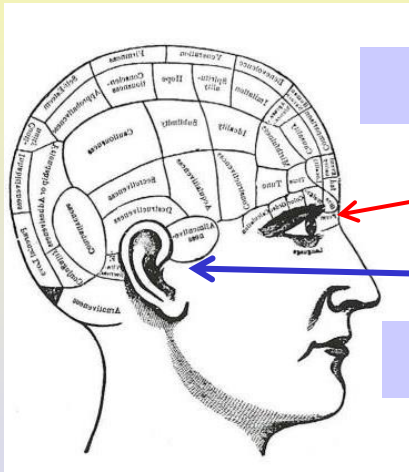


$10^{-7} - 10^{-9}$ s/jour



10^{-2} s/jour

De la durée à la distance



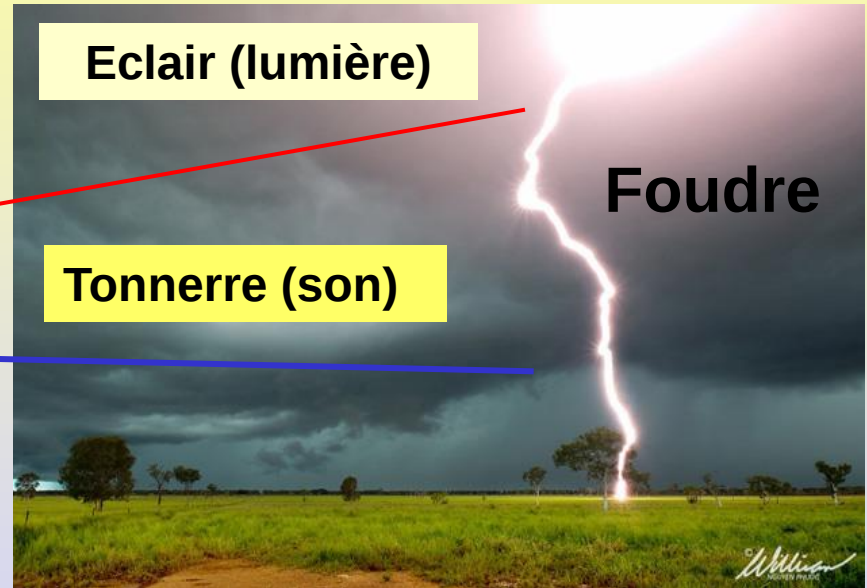
Date d'émission t_E

Date de réception t_R

Eclair (lumière)

Tonnerre (son)

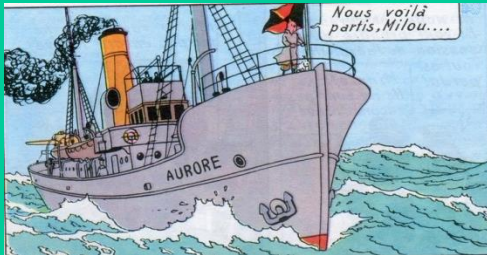
Foudre



$$d = c_{\text{son}}(t_R - t_E) \quad ; \quad d(\text{km}) \approx \text{durée}(\text{s})/3$$

Localisation dans un plan (1)

Où suis-je ?



S₁

X



d₁

$$d_1 = c_{\text{son}}(t_{R1} - t_{E1})$$

d₂

X

S₂

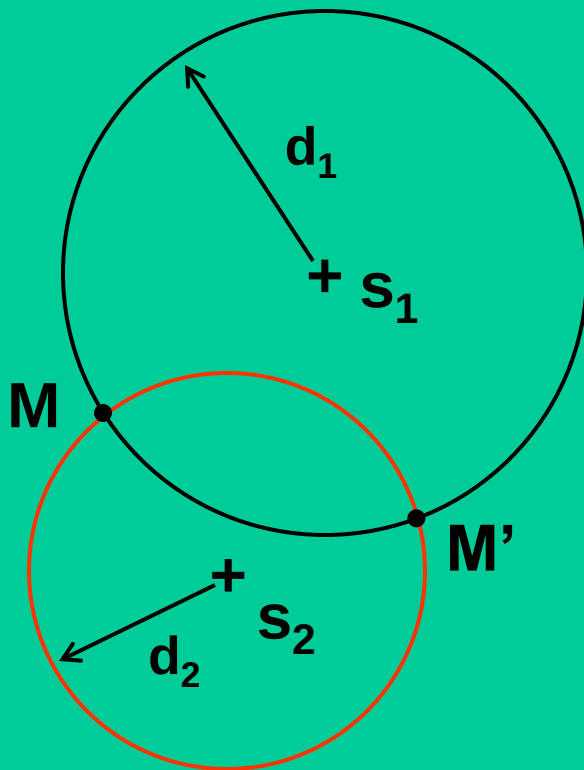


$$d_2 = c_{\text{son}}(t_{R2} - t_{E2})$$

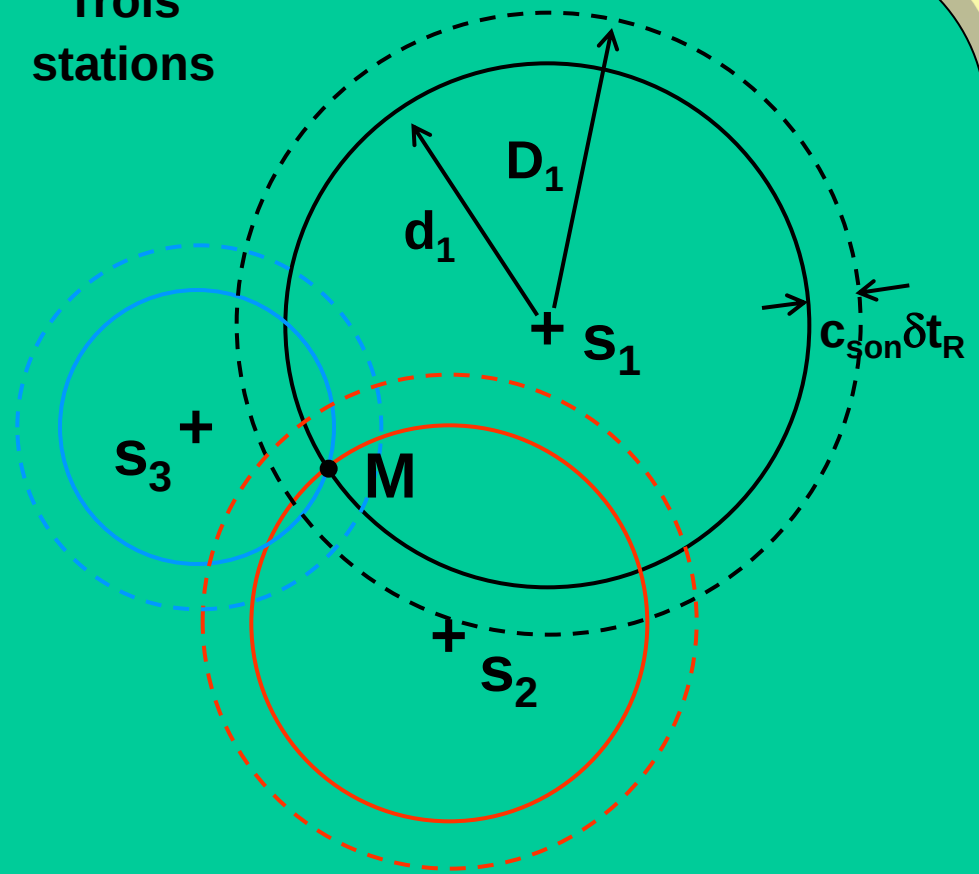


Localisation dans un plan (2)

Deux stations

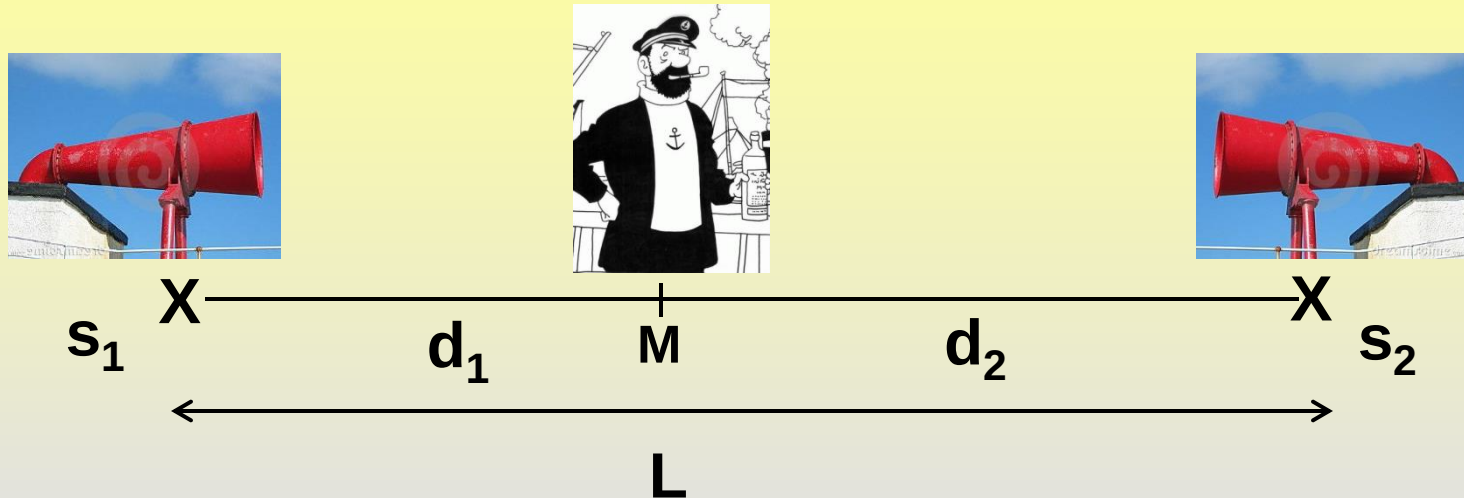


Trois stations



Distance d - pseudo-distance D

Le problème de la synchronisation



Attention : L'horloge du capitaine est décalée de δt_R !

Pseudo-distances mesurées : $D_1 = d_1 + c_{\text{son}} \delta t_R$ et $D_2 = d_2 + c_{\text{son}} \delta t_R$

Valeurs corrigées :

$$d_1 = (L + D_1 - D_2)/2 \quad d_2 = (L + D_2 - D_1)/2 \quad \delta t_R = (D_1 + D_2 - L)/2c_{\text{son}}$$

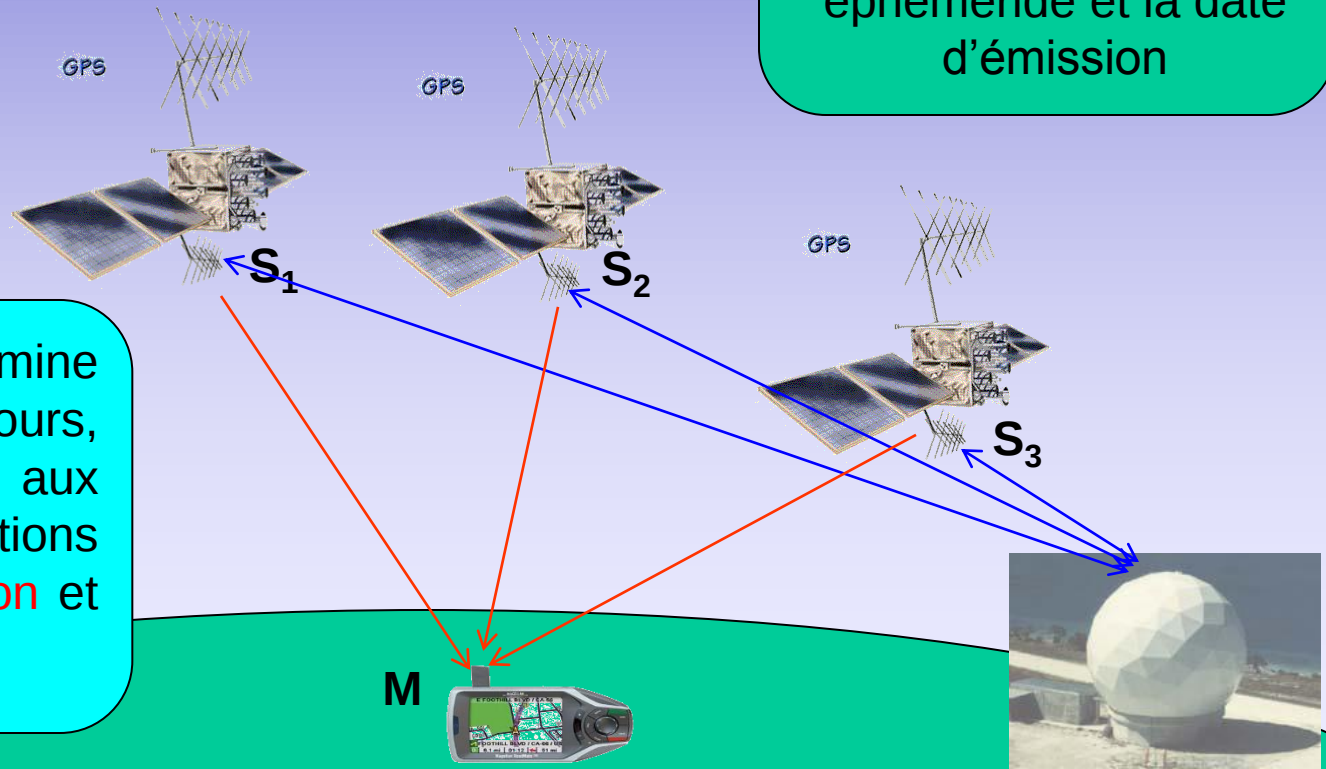
Transposition à l'espace

1. Des satellites munis d'horloges atomiques **synchronisées**

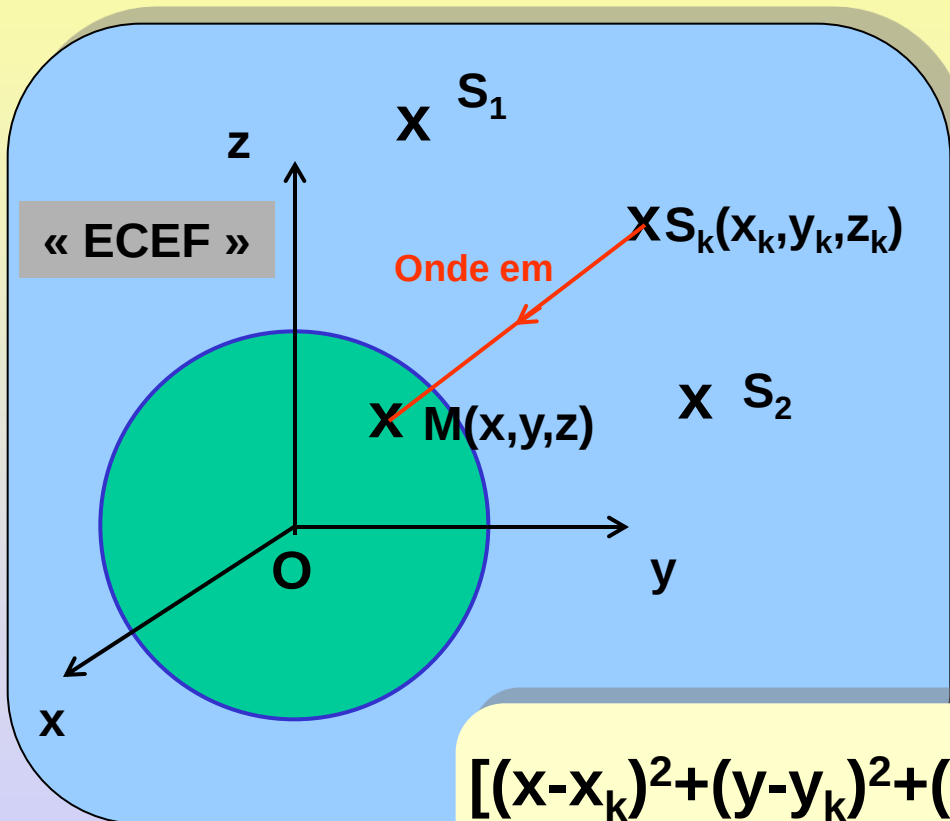
2. Les satellites connaissent leurs positions grâce à des **stations de contrôle**

3. Chaque satellite transmet par **ondes électromagnétiques** son identification, son éphéméride et la date d'émission

4. Le récepteur détermine les temps de parcours, calcule ses distances aux satellites, leurs positions puis sa propre **position** et la **date** « exacte »



Calcul de la position



$$D = c(t_R - t_E) = d + c\delta t_R$$

$$1 \text{ m} \leftrightarrow 30 \text{ ns} !$$

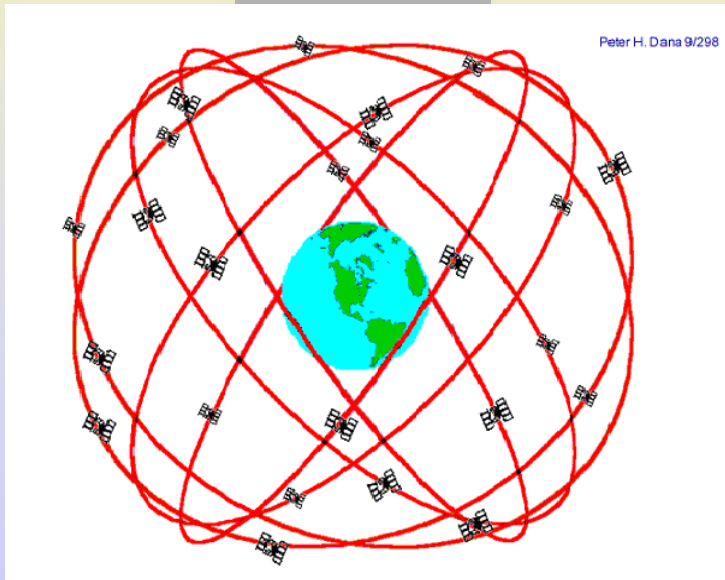
$$[(x-x_k)^2 + (y-y_k)^2 + (z-z_k)^2]^{1/2} + c\delta t_R = D_k, \quad k = 1..4$$

Résolution du système $\rightarrow (x, y, z)$ et δt_R

La constellation de satellites (1)

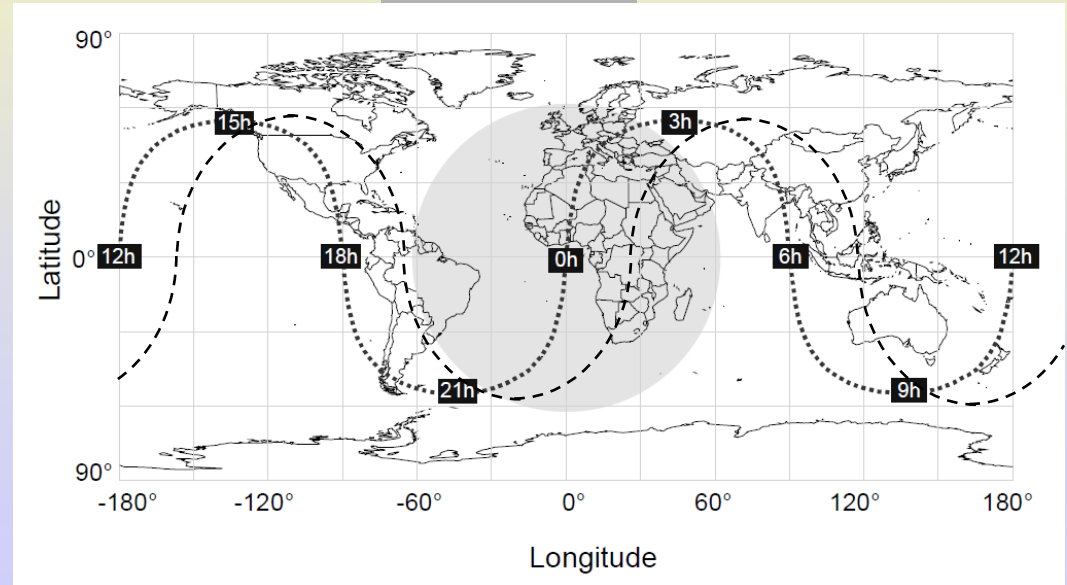
En tout point et 24H/24 au moins 4 satellites au dessus de l'horizon et « bien » disposés

« ECI »



Trajectoires dans le repère « géocentrique »

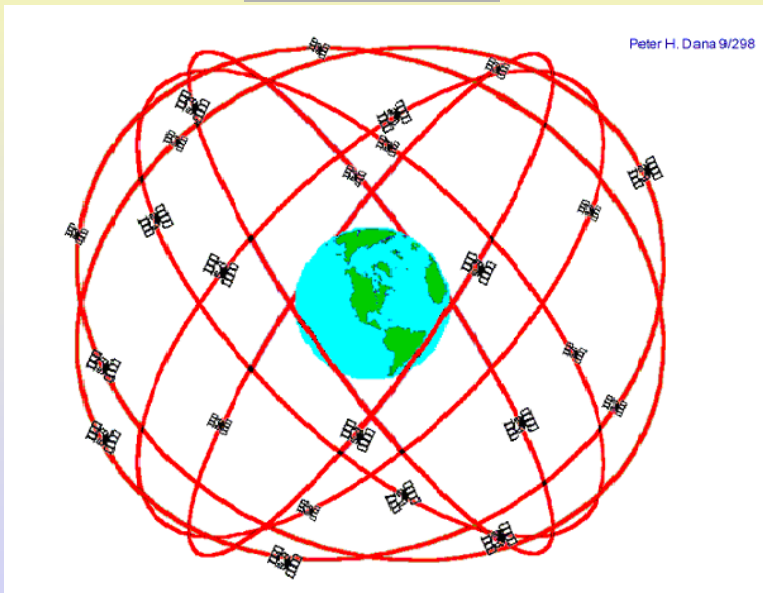
« ECEF »



Trajectoires dans le repère « terrestre »

La constellation de satellites (2)

« ECI »



- 31 satellites (en 2013)
- 6 plans orbitaux inclinés de 55° sur l'équateur et décalés de 60° entre eux
- 5 satellites par plan

- Trajectoires quasi circulaires à 20 200 km d'altitude
- Période : 11h 58 min
- Vitesse : 3,9 km/s

Mouvements des satellites (1)

Les lois de Kepler

(Interaction de deux corps à symétrie sphérique ; $M \gg m$)

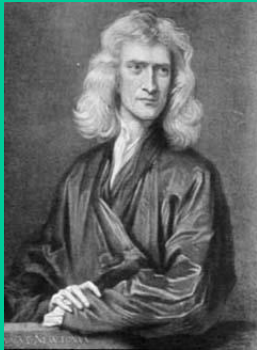


Kepler
(1571-1630)

1. La trajectoire est une ellipse dont un foyer est au centre de force
2. Le mouvement suit la loi des aires
3. Le carré de la période est proportionnel au cube du demi-grand axe

Mouvements des satellites (2)

La mécanique newtonienne



Newton
(1642-1727)

1. P.F.D. (référentiel galiléen)

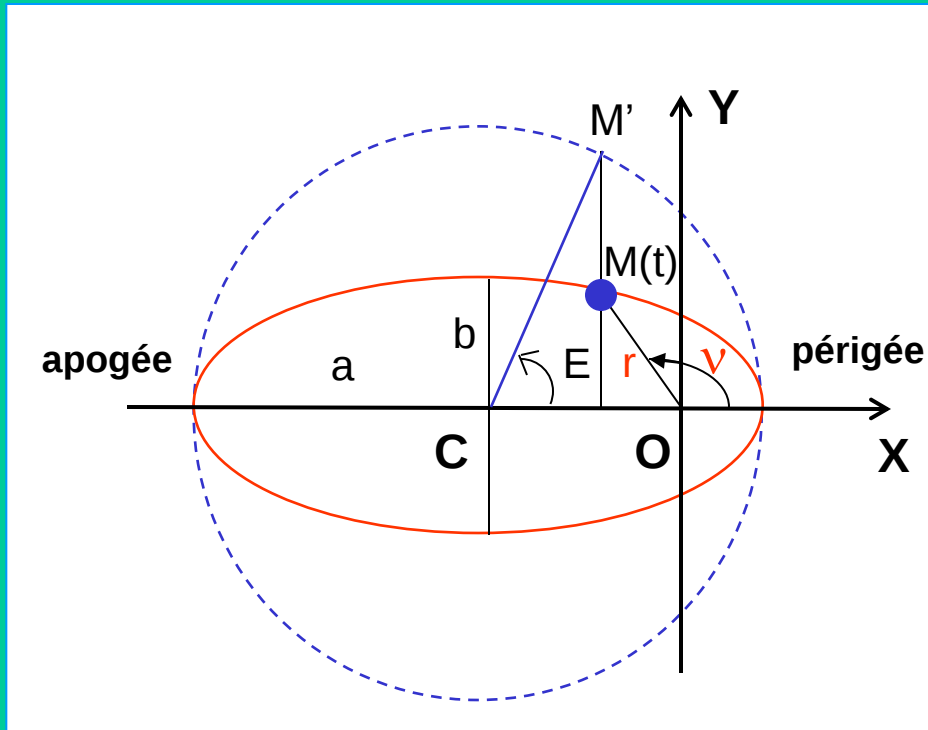
$$m\vec{a} = \vec{F}$$

2. Loi de la gravitation

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\vec{u} + \dots$$

Mouvements des satellites (3)

Mouvement sur l'orbite



a : demi-grand-axe ($\rightarrow T$)

e : excentricité

t_p : date de passage au périgée

Equation de Kepler :

$$E - e.\sin E = (2\pi/T).(t-t_p) = M$$

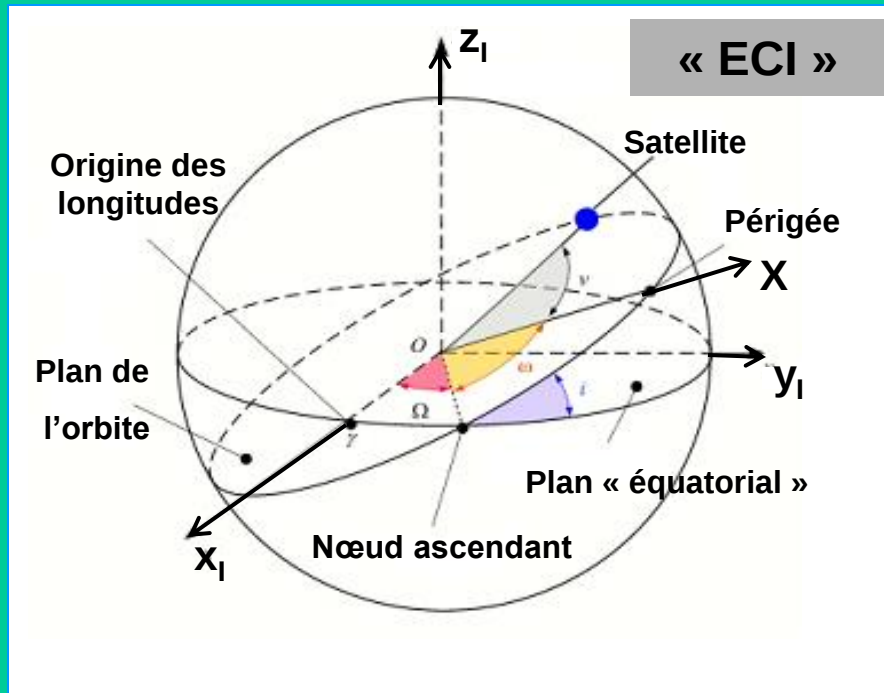
Position à t :

$$X = a.(\cos E - e)$$

$$Y = a(1-e^2)^{1/2}.\sin E$$

Mouvements des satellites (4)

Positionnement de l'orbite



i : inclinaison du plan de l'orbite
 Ω : longitude du nœud ascendant
 ω : position du périgée

Mvt
Terre

$$(X, Y) \xrightarrow{(\omega, i, \Omega)} (x_I, y_I, z_I) \xrightarrow{\text{Mvt Terre}} (x, y, z)$$

« ECI » « ECEF »

Mouvements des satellites (5)

Au delà du problème des deux corps !

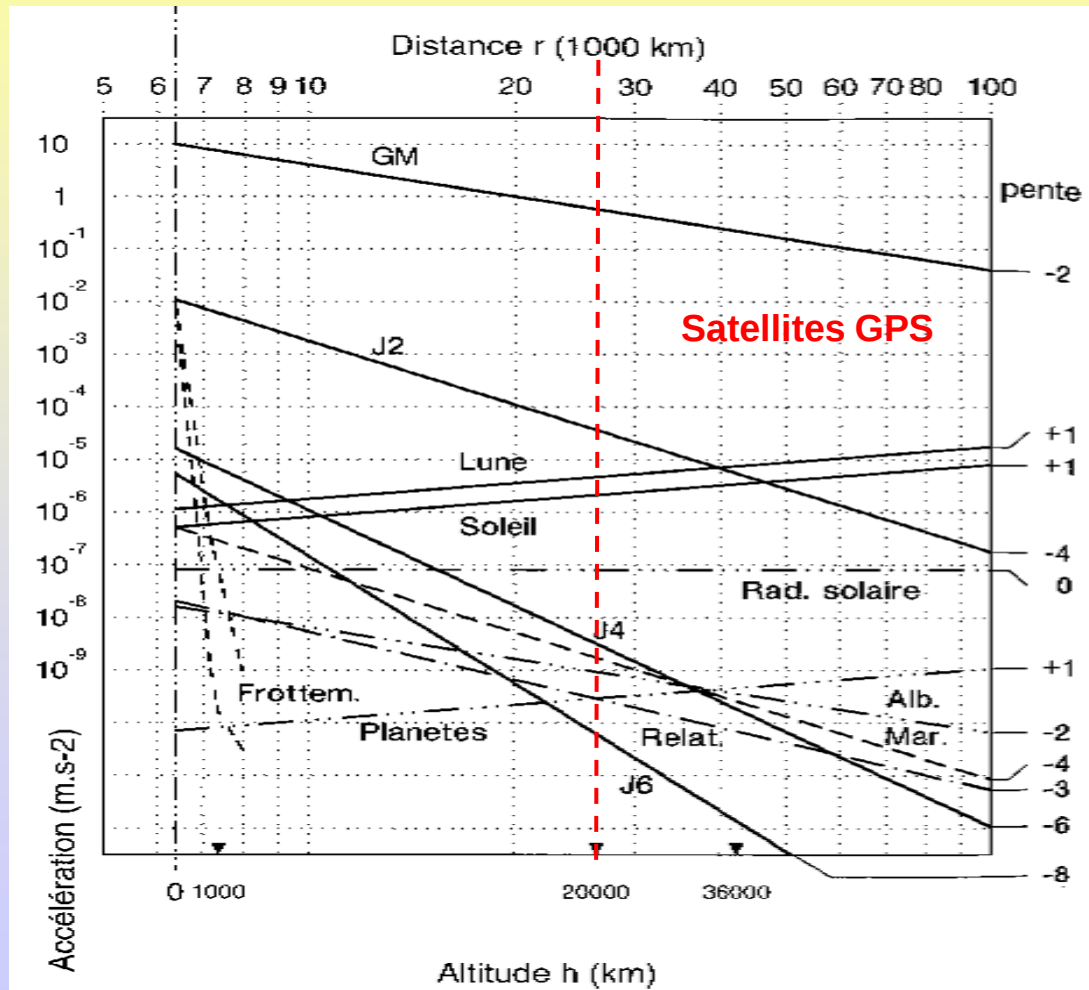
❑ Des perturbations ...

- La Terre n'est pas « sphérique »
- Le référentiel géocentrique n'est pas exactement galiléen (champ luni-solaire)
- La pression de radiation
- ...

❑ et leurs conséquences

- Les éléments de l'orbite évoluent et doivent être réactualisés.
- Il est nécessaire de pouvoir déterminer leur évolution entre deux réactualisations.

Mouvements des satellites (6)

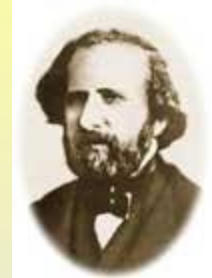
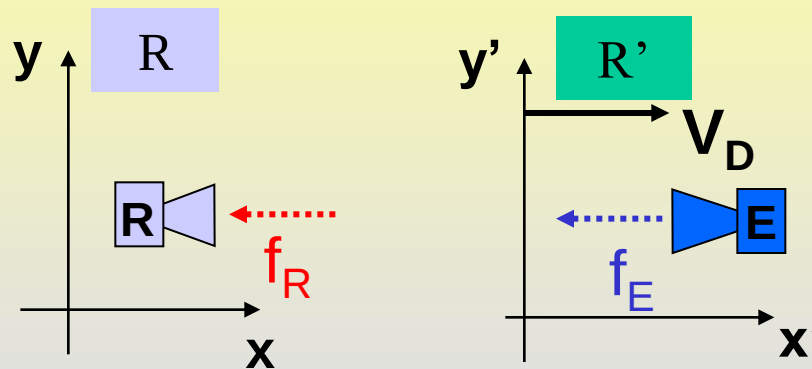


D'après le livre :
« Satellites : de
Kepler au GPS »,
Michel Capderou

Interlude : Effet Doppler Fizeau (1)



Doppler
(1853-1928)



Fizeau
(1819-1896)

Cinématique classique

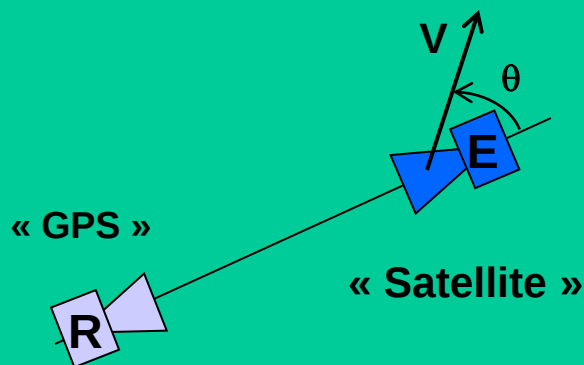
$$(V_D \ll c)$$

$$f_R = f_E \left(1 - \frac{V_D}{c} \right)$$

Éloignement $f \square$, rapprochement $f \square$

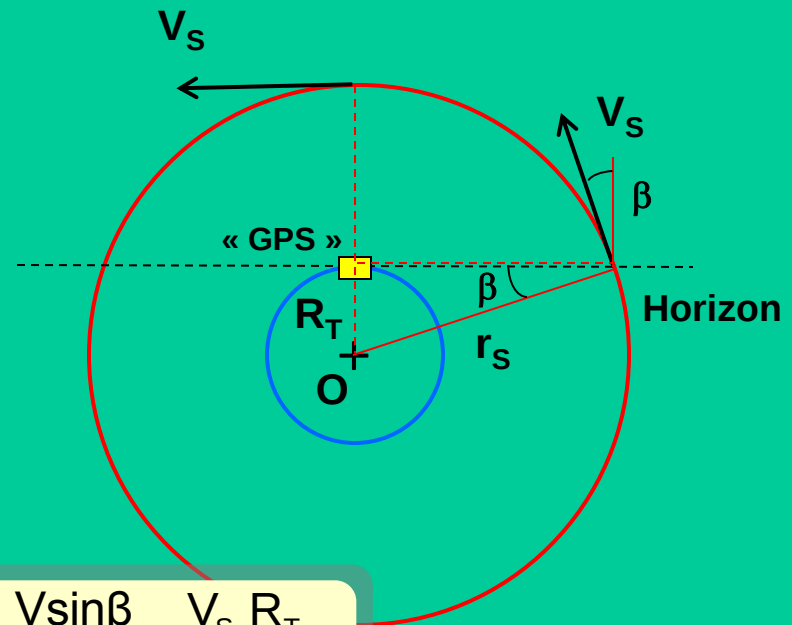
Interlude : Effet Doppler Fizeau (2)

Ordre de grandeur



$$V_D = V \cdot \cos\theta$$

$$\frac{\Delta f}{f} = -\frac{V_D}{c} = -\frac{V \cos\theta}{c}$$

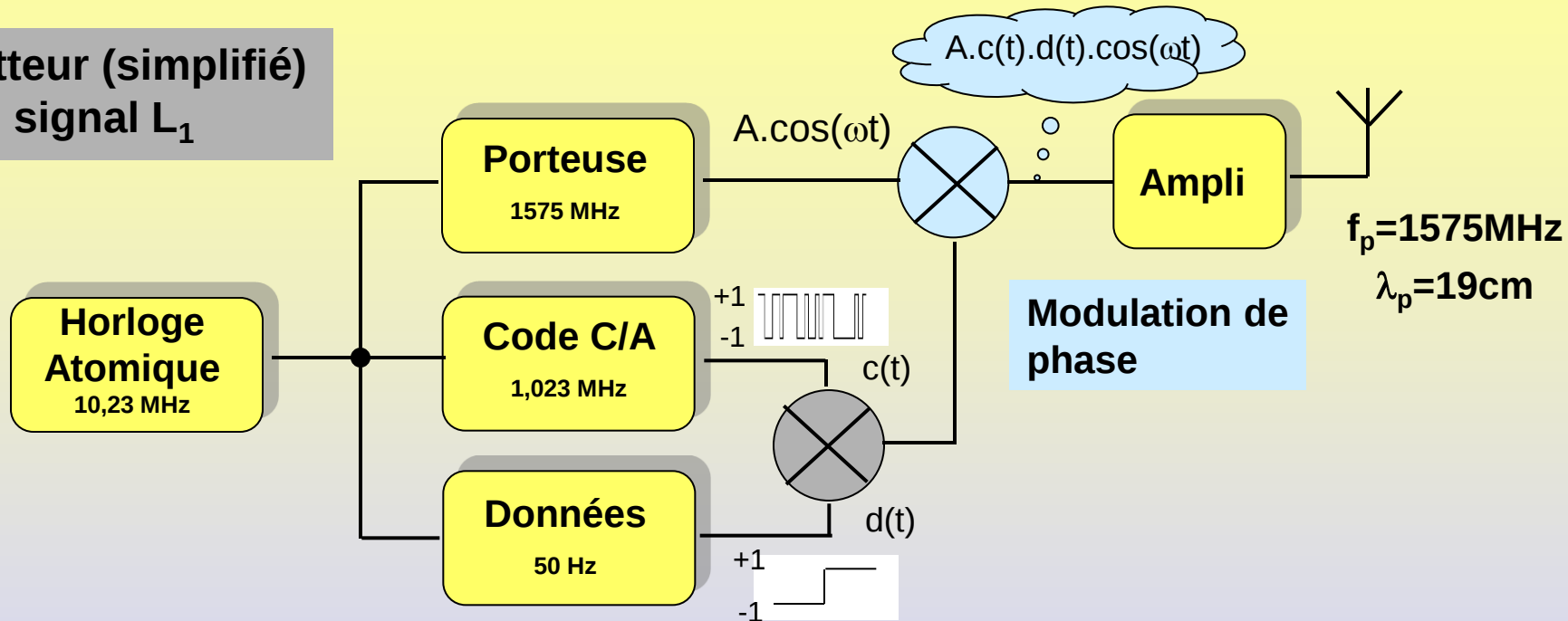


$$\left| \frac{\Delta f}{f} \right| = \frac{V \sin\beta}{c} = \frac{V_s}{c} \frac{R_T}{r_s}$$

$$f = 1575 \text{ MHz} \rightarrow \Delta f \approx \pm 5 \text{ kHz}$$

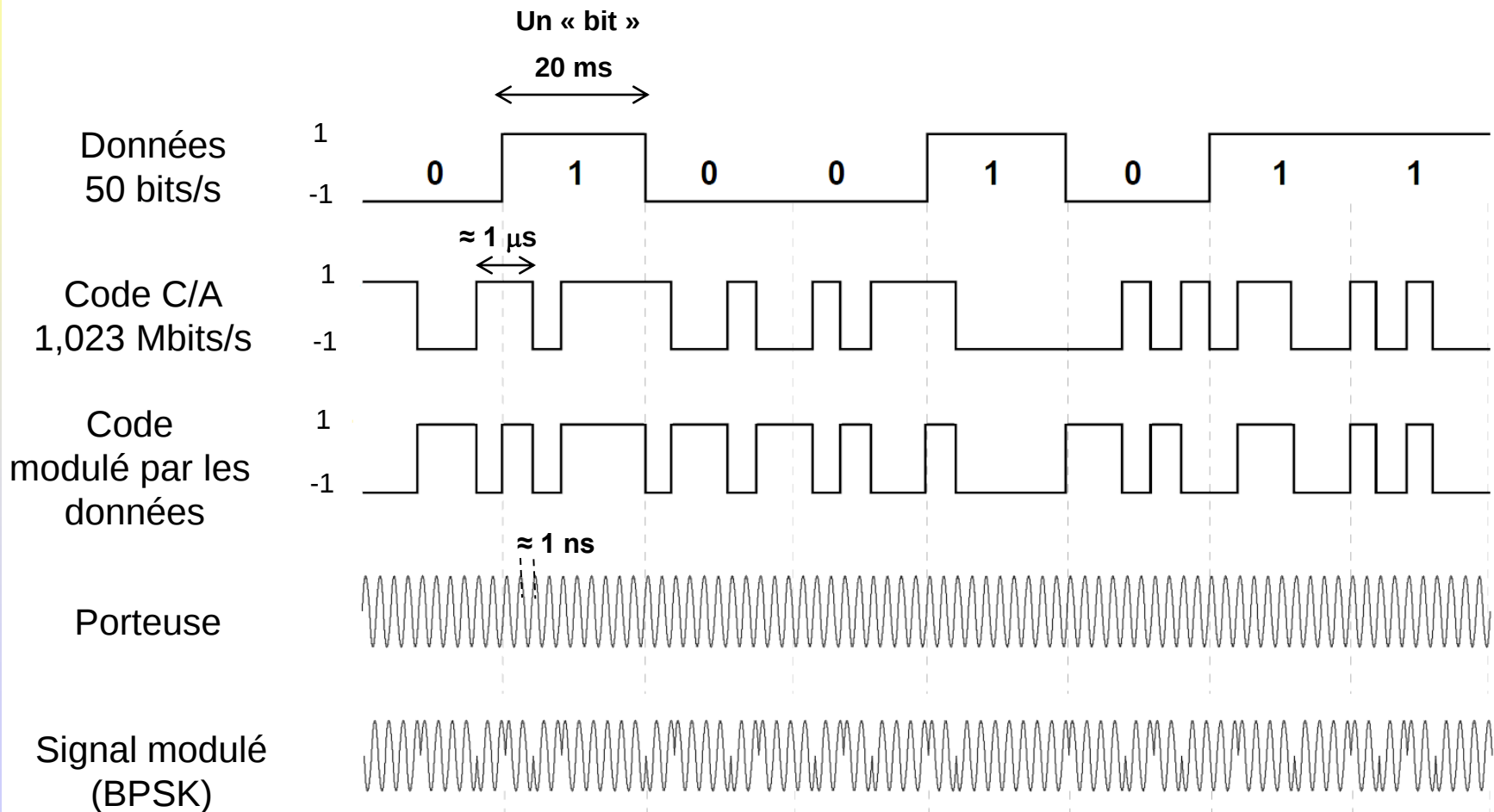
Le signal GPS L1 (2)

Emetteur (simplifié)
signal L_1



- ❑ Porteuse : signal sinusoïdal $f_p = 1575 \text{ MHz}$ ($= f_H \times 154$)
- ❑ Code d'identification : signal pseudo aléatoire $f_c = 1,023 \text{ MHz}$ ($= f_H / 10$)
- ❑ Données de navigation : signal numérique $f_D = 50 \text{ Hz}$ ($= f_H / 204600$)

Le signal GPS L1 (2)

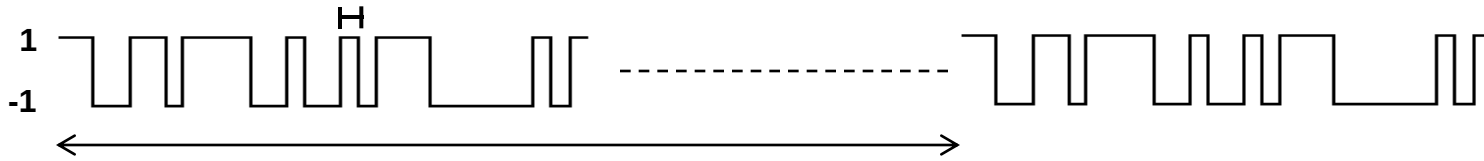


Identification des satellites (1)

Code C/A : suite de « 0 » et de « 1 » pseudo-aléatoire

Un « chip »

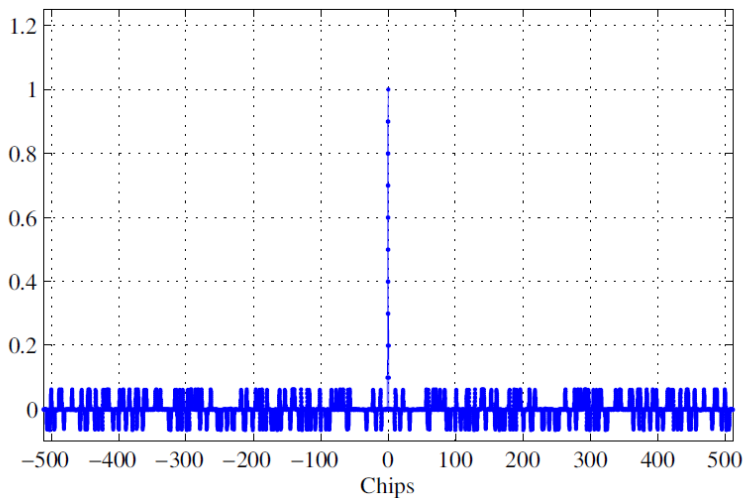
1 ms/1023



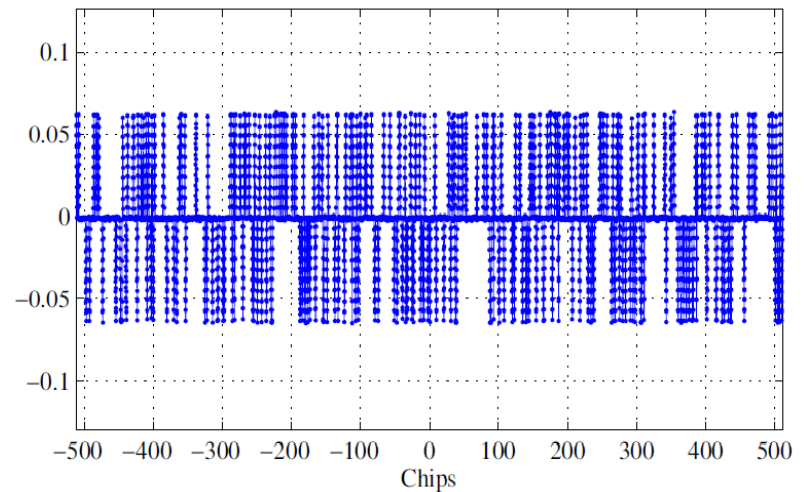
Ex : code n°18/36

1 ms

Auto-corrélation (code 32)



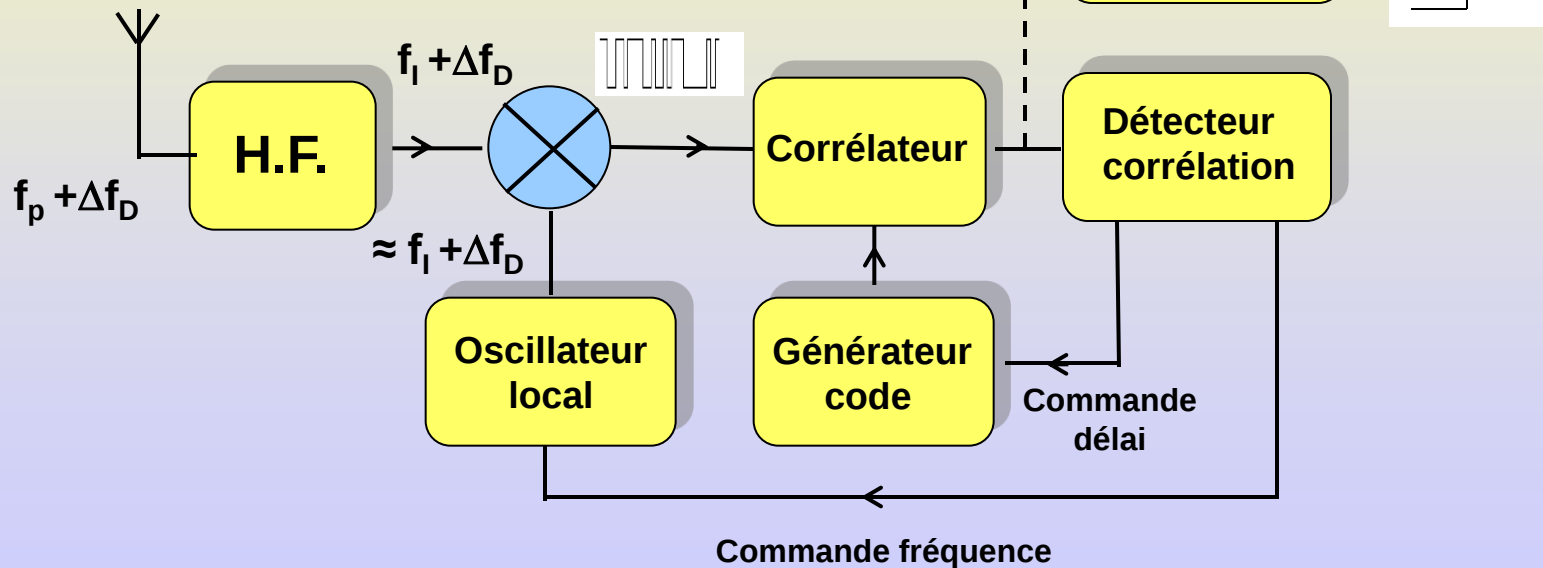
Corrélation croisée (codes 1 et 32)



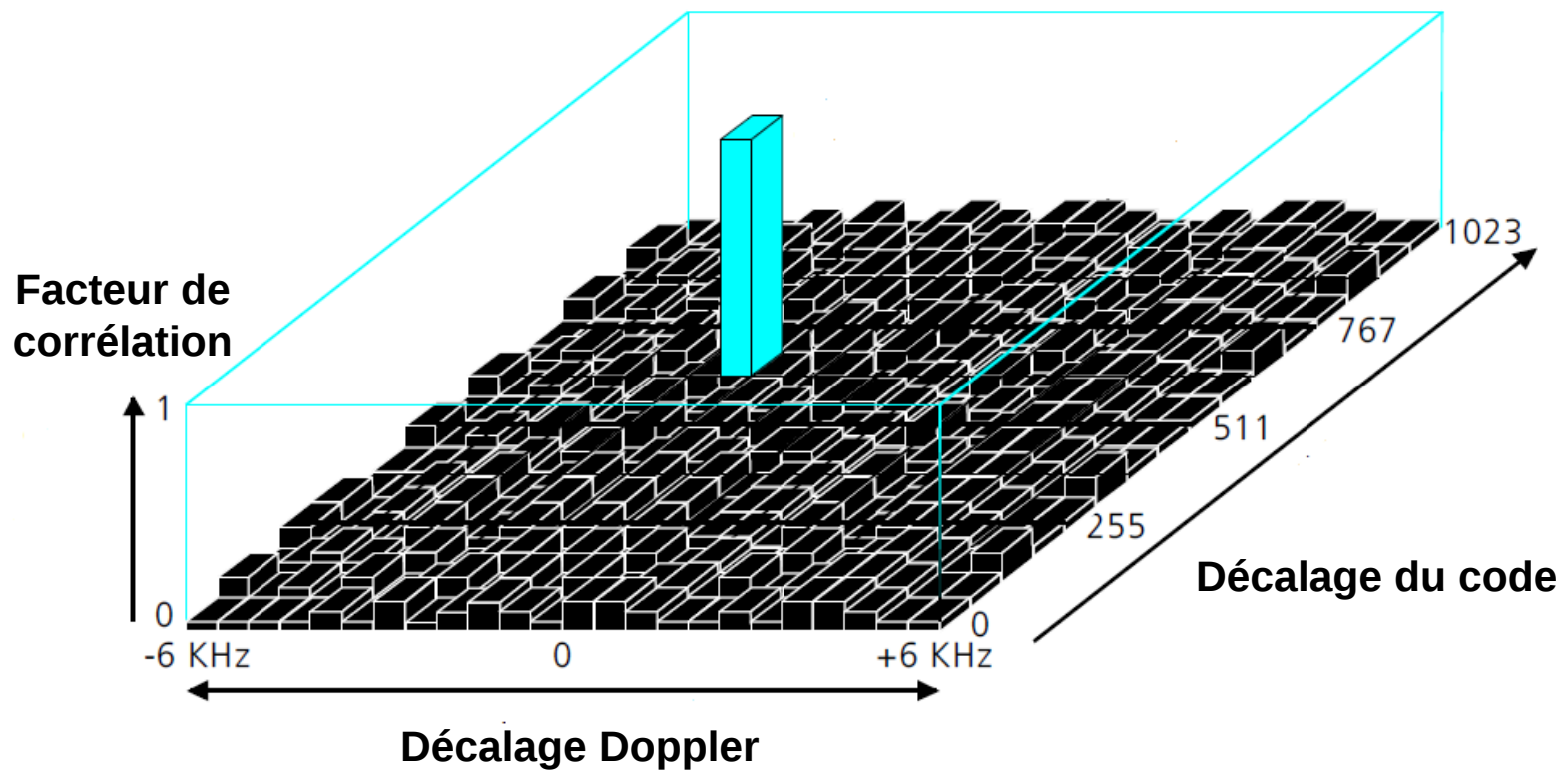
Identification des satellites (2)

Acquisition - poursuite

Récepteur
(très simplifié !)

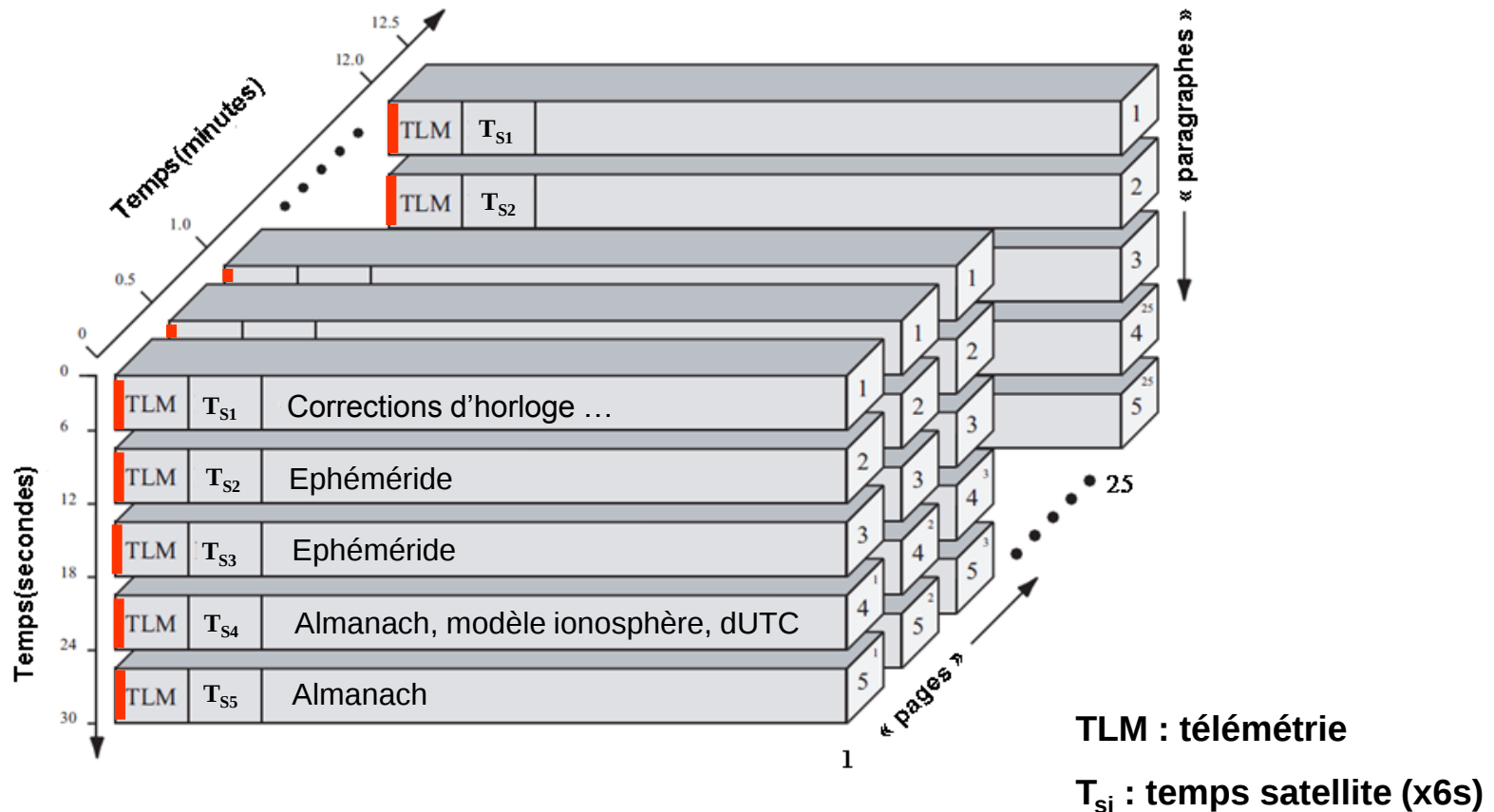


Identification des satellites (3)



Données de navigation (1)

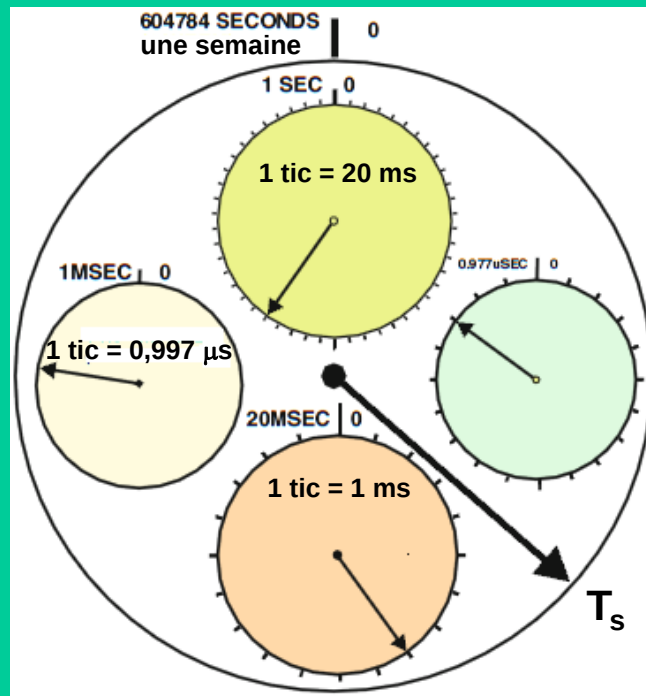
Structure du message



Données de navigation (2)

Le « temps » du satellite reconstitué

Préambule : 10001011



Incréments :

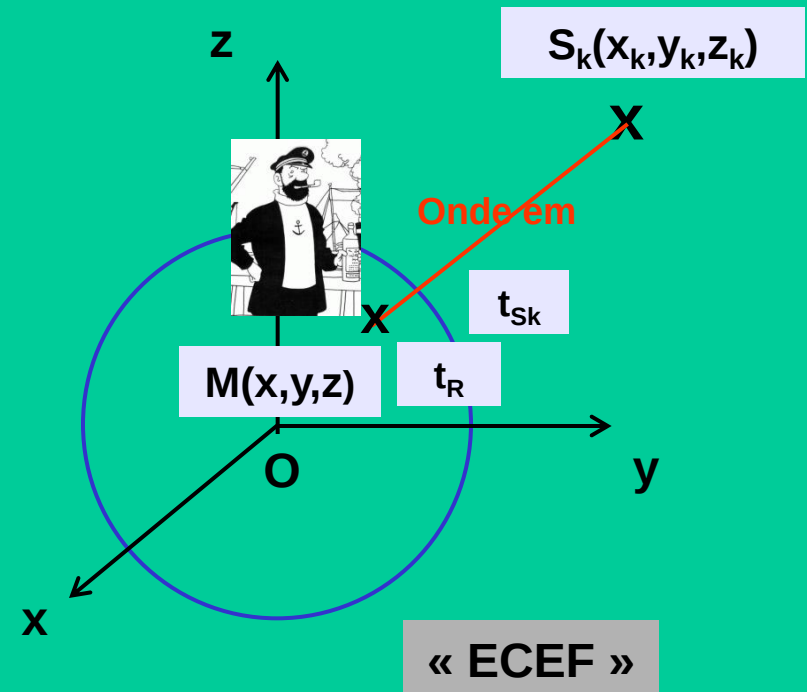
- ☐ Données : 20 ms
- ☐ Code : 1 ms
- ☐ « chips » : 0,997 μs
- ☐ ...

Données de navigation (3)

Conclusion ...

Exemple de données de navigation (almanach)

```
***** Week 267 almanac for PRN-01 *****  
ID: 01  
Health: 000  
Eccentricity: 0.5360126495E-002  
Time of Applicability(s): 61440.0000  
Orbital Inclination(rad): 0.9810490239  
Rate of Right Ascen(r/s): -0.7577458489E-008  
SQRT(A) (m 1/2): 5152.597656  
Right Ascen at Week(rad): 0.6406025110E+000  
Argument of Perigee(rad): -1.689387348  
Mean Anom(rad): -0.2325692391E+001  
Af0(s): 0.3662109375E-003  
Af1(s/s): 0.3637978807E-011  
week: 267
```

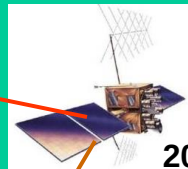


Sources d'erreurs (1)



20000 km

V_s



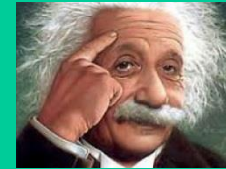
20000 km

g

Ionosphère
Stratosphère
Troposphère



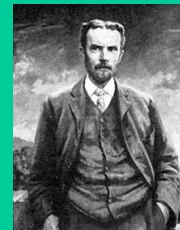
L'espace-temps est
relativiste !



Einstein
1879-1955

- ☐ Dilatation des durées
- ☐ Décalage gravitationnel

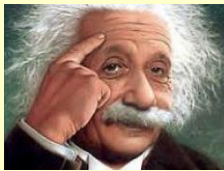
La propagation n'a pas lieu
dans le vide !



Heaviside
1850-1925

- ☐ Ionosphère
- ☐ Troposphère

Sources d'erreurs (2)



A chacun son temps ...

$$\Delta t_R \approx \Delta t_{Sat} + \Delta t_{Sat} \left(\frac{V_s^2}{2c^2} + \frac{g_o R_T^2}{c^2} \left(\frac{1}{R_T + d} - \frac{1}{R_T} \right) \right)$$

En une journée écart de : 7 - 45 = - 38 μ s !

Compensation au niveau des horloges des satellites

10,23000000000 MHz $\rightarrow$ 10,22999999543 MHz

(soit 0,00457 Hz !)

Sources d'erreurs (3)

Ionosphère : $50 < z < 1000$ km

- ❑ Milieu ionisé, **dispersif**
- ❑ Caractéristiques variables dans le temps : densité électronique $N_e(z, t)$

$$c \rightarrow \frac{c}{n_g} \quad \text{où} \quad n_g \approx 1 + A \frac{N_e}{f^2} \Rightarrow D \rightarrow D - \frac{B(t)}{f^2}$$

Correction partielle par modélisation ou par mesure bi-fréquences :

$$\Delta D_1 = \frac{f_2^2}{f_2^2 - f_1^2} (D_2 - D_1) \quad \text{L1 : } f_1 = 1575 \text{ MHz, L2C : } f_2 = 1227 \text{ MHz}$$

Sources d'erreurs (4)

Troposphère : $0 < z < 15$ km

- ❑ Milieu neutre, **non dispersif** ($n \approx 1,0003$)
- ❑ Composante « sèche » : N_2, O_2, Ar, CO_2 ; humide : H_2O

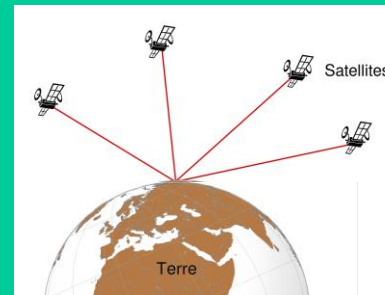
$$c \rightarrow \frac{c}{n} \quad \text{où} \quad n \approx 1 + k_1 \frac{P}{T} + k_2 \frac{p_{H_2O}}{T} + k_3 \frac{p_{H_2O}}{T^2}$$

Modélisation de l'atmosphère nécessaire (météorologie)

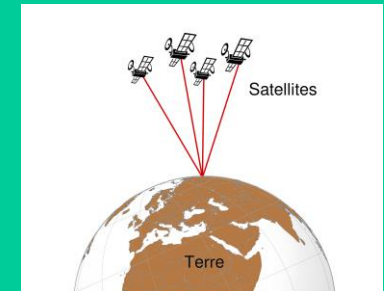
Sources d'erreurs (5)

Source d'erreur	Erreur(1σ , m)
Horloges satellites et éphémérides	2,0
Ionosphère	7,0
Troposphère	0,2
Bruit du récepteur	0,1
Multitrajet	1,0
Erreur totale (E_T)	7,5

Dilution de la précision



« 1,5 »



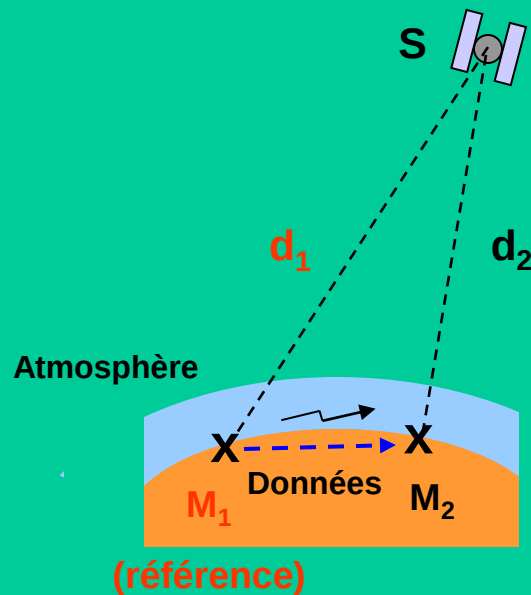
« 5 »

« HDOP »

Erreur pratique (2σ - 95%) = $E_T \times \text{HDOP}$ Ex : $2 \times 1,5 \times 7,5 = 22,5 \text{ m}$

Au delà du mètre (1)

Du GPS au DGPS ... De l'absolu au relatif ...



$$D_1 = d_1 + c\delta t_{R1} + c\Delta t_{\text{atm},1} + \varepsilon_1 \text{ (référence)}$$

$$D_2 = d_2 + c\delta t_{R2} + c\Delta t_{\text{atm},2} + \varepsilon_2$$

« absolu » :

$$d_2 + c\delta t_{R2} = D_2 - c\Delta t_{\text{atm},2} - \varepsilon_2$$

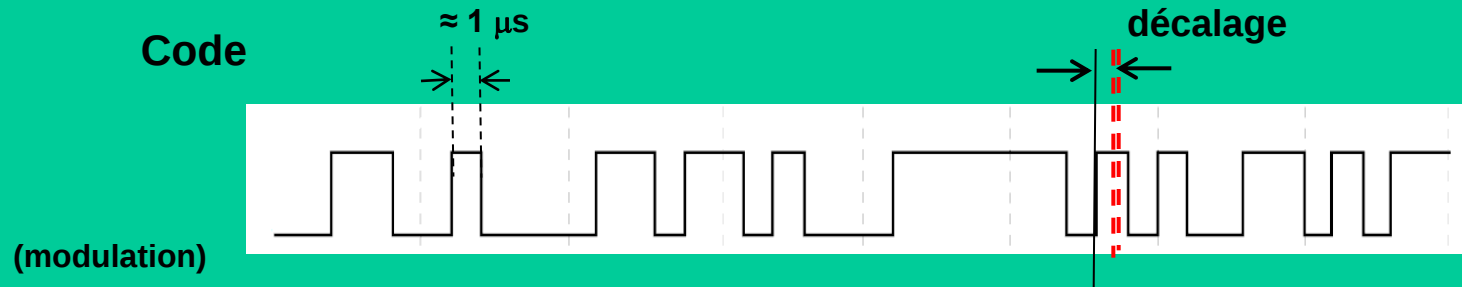
« relatif » :

$$d_2 + c(\delta t_{R2} - \delta t_{R1}) = d_1 + (D_2 - D_1) - \varepsilon_2 + \varepsilon_1$$

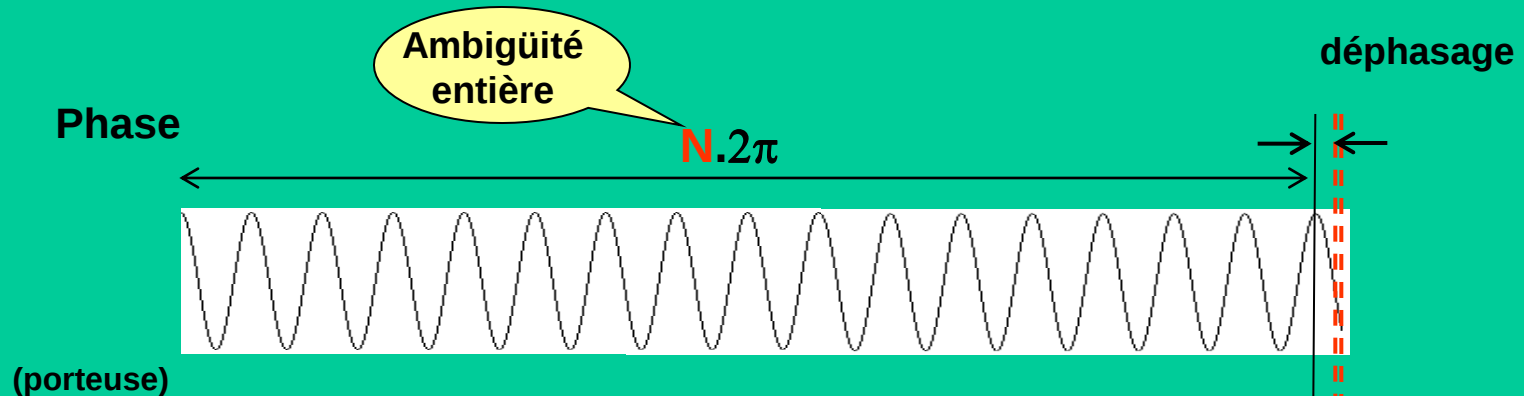
Élimination des termes **communs**
aux deux récepteurs !

Au delà du mètre (2)

Du code à la phase (mesures à « 1% »)



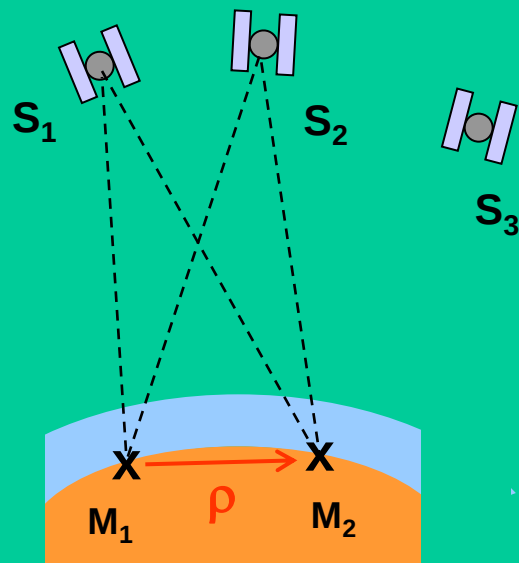
$$\text{Résolution spatiale : } 300 \times \frac{1}{100} = 3 \text{ m}$$



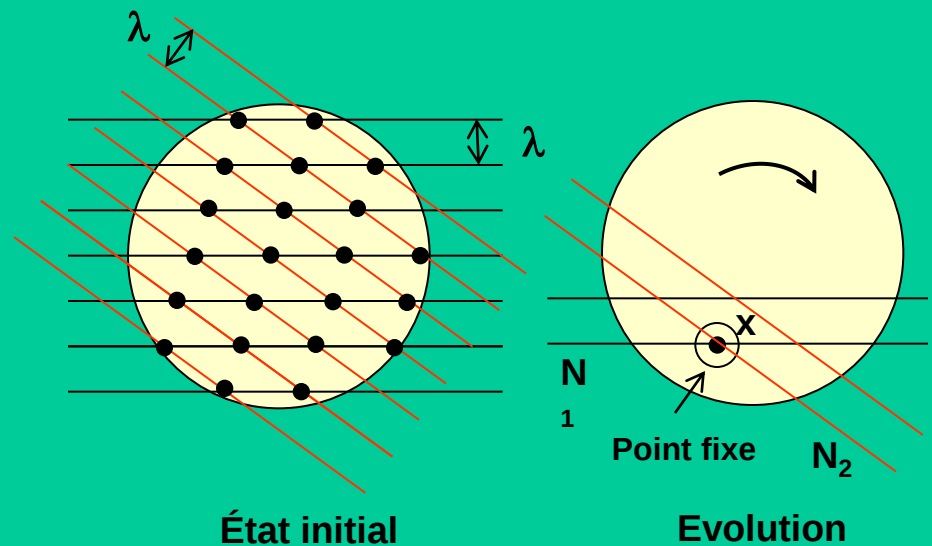
$$\text{Résolution spatiale : } 0,19 \times \frac{1}{100} = 1,9 \text{ mm}$$

Au delà du mètre (3)

Résolution des ambiguïtés entières : illustration géométrique



Double différence :
Élimination des termes
communs (R et S)



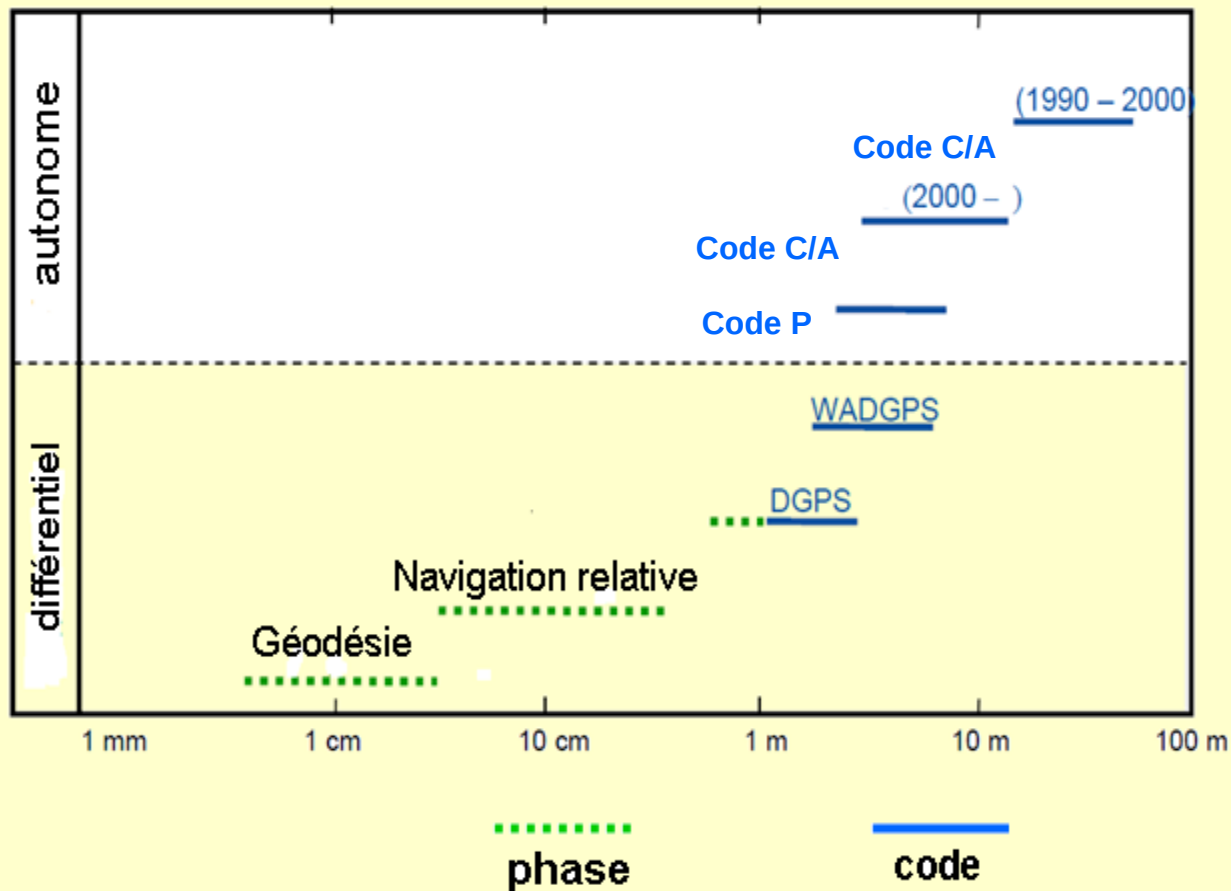
Au delà du mètre (4)



randonnée



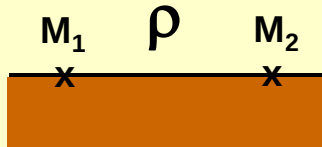
géodésie



Au delà du mètre (5)

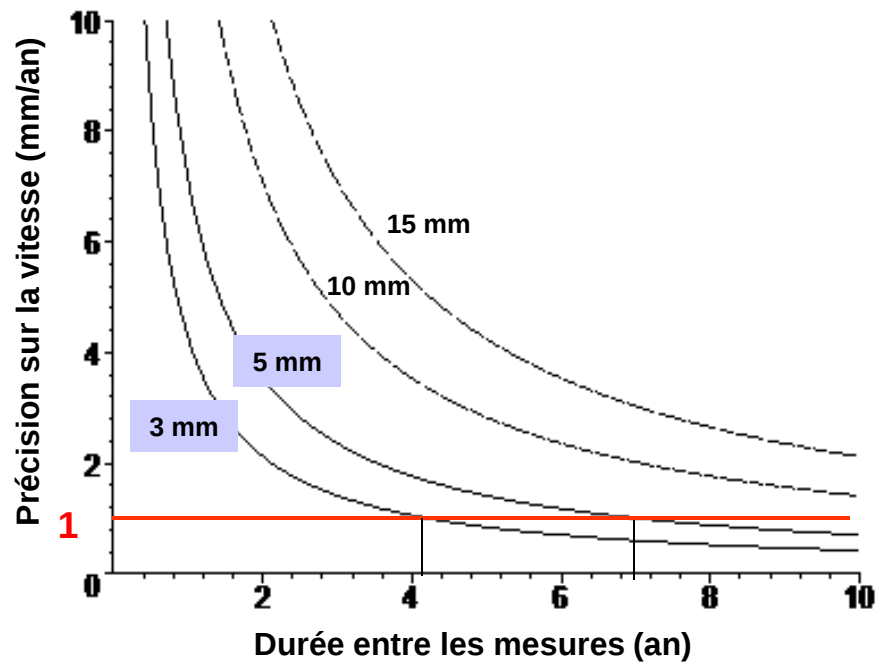
Vers la tectonique des plaques ...

Précision sur la
vitesse relative



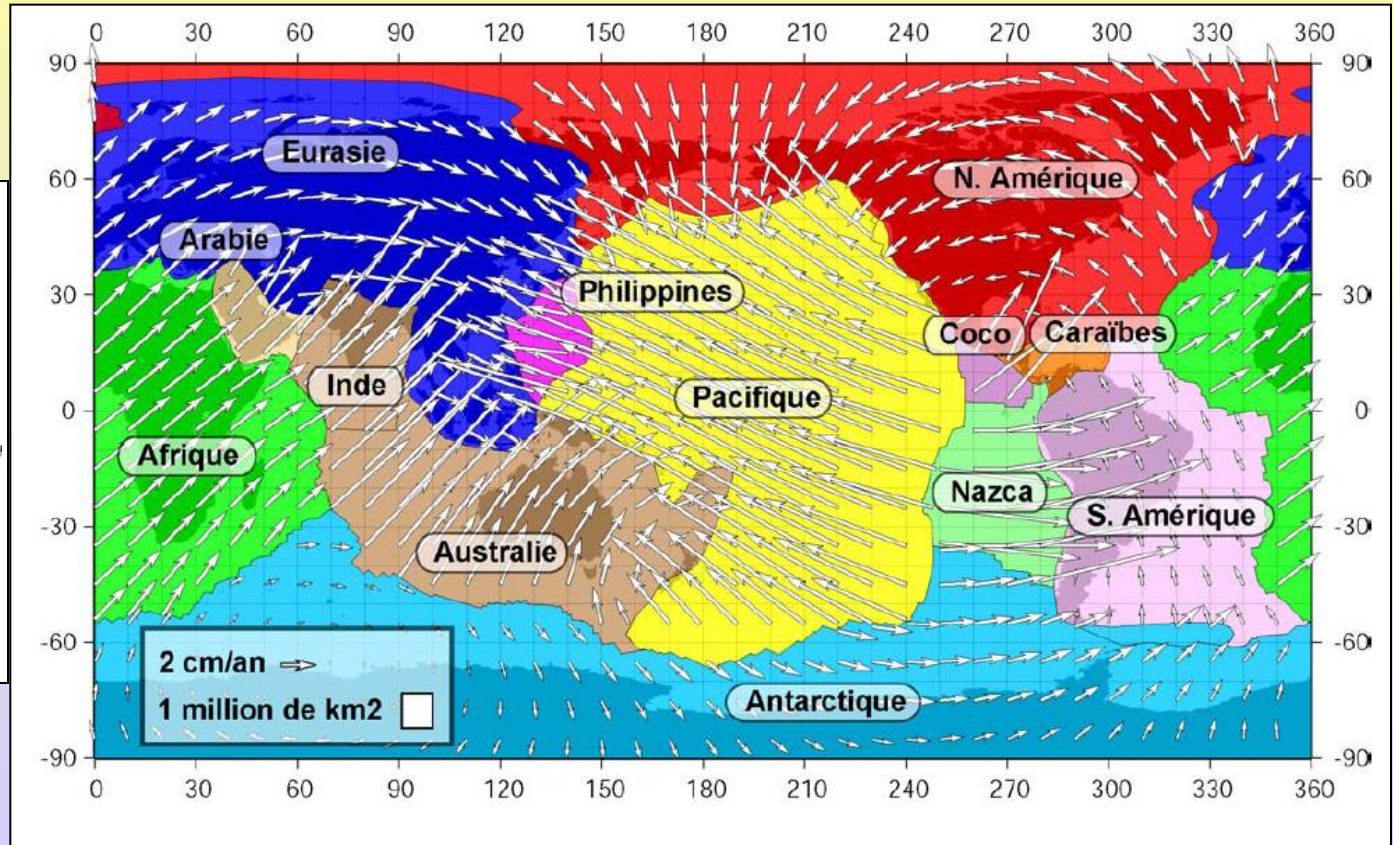
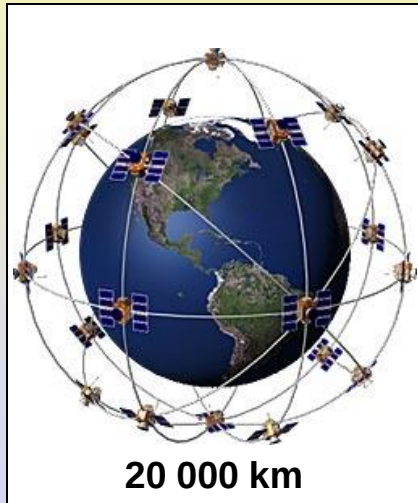
$$v_r = \frac{\rho_2 - \rho_1}{t_2 - t_1}$$

$$\Delta v_r = \frac{\sqrt{2} \cdot \Delta \rho}{t_2 - t_1}$$



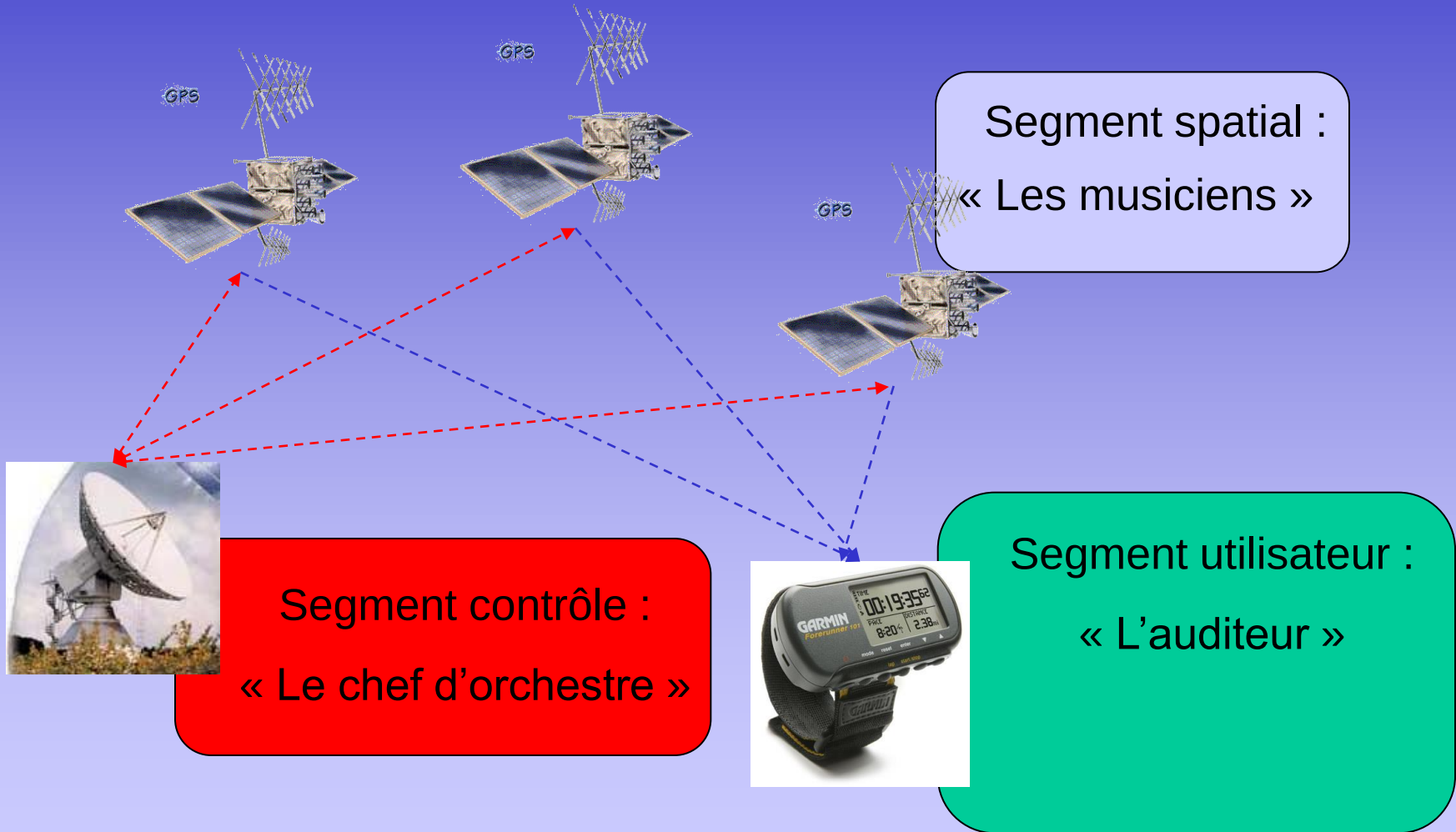
Conclusion

Une constellation de satellites à 20 000 km ...



... des déplacements de quelques cm !

Positionnement global : Les 3 segments



Glouass - Galileo

Glouass : Système d'origine soviétique

Constellation actuelle (2013) : 24 satellites opérationnels

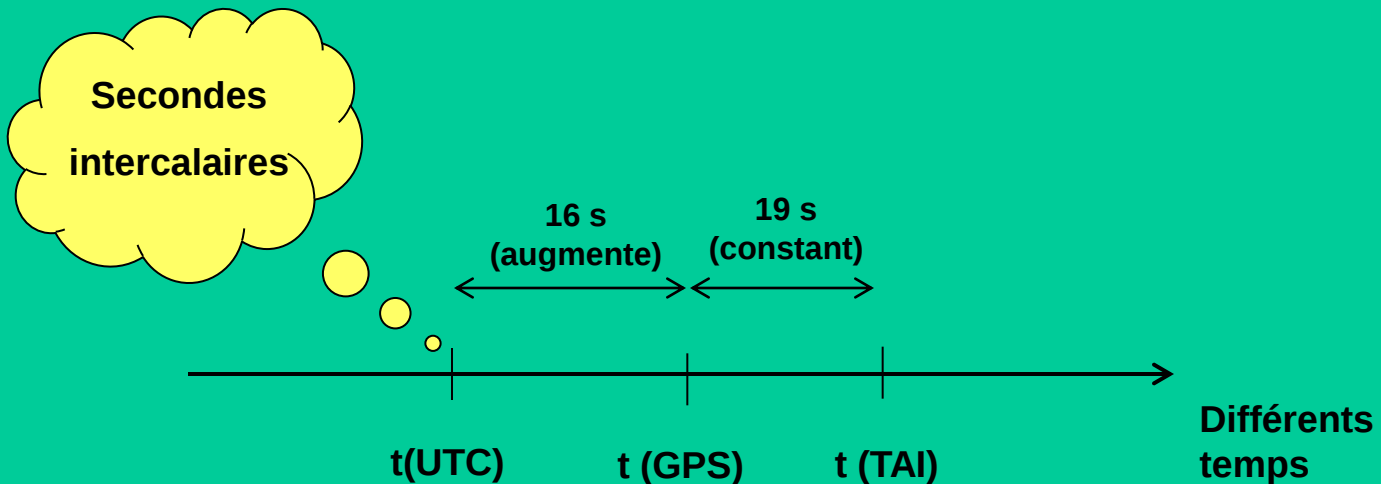
Les satellites émettent en bande L sur des fréquences différentes (15 canaux) , par contre le code pseudo-aléatoire est identique pour tous.

Galileo : Système européen

Constellation actuelle (2013) : 4 satellites opérationnels (ce qui a permis de tester le système, mais est évidemment insuffisant ...)

Le principe est analogue au GPS mais avec une modulation plus complexe :

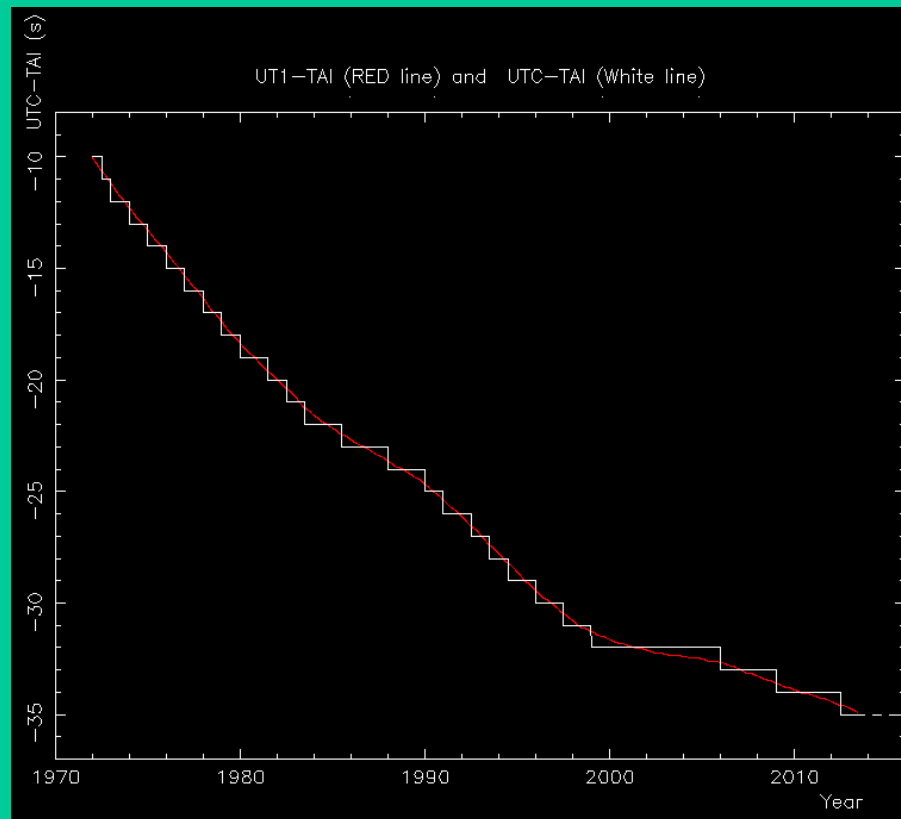
Le temps ...



- ❑ L'origine du temps GPS remonte au 6 janvier 1980 00:00 (UTC), à cette date il était calé sur le temps UTC et présentait un retard de 19 s sur le temps TAI. Le temps GPS est compté en semaine depuis cette date origine, on est actuellement en semaine 1766 (au 15/11/2013).
- ❑ Le décalage avec TAI est resté constant (il s'agit de deux temps atomiques !) mais l'écart avec UTC augmente régulièrement à cause du ralentissement de la Terre ce qui a introduit un décalage cumulé d'environ 1 ms sur un jour par rapport à l'échelle atomique. D'où la nécessité d'introduire une seconde intercalaire périodiquement. Le décalage est actuellement (en 2013) de 16 s.

Le temps ...

Secondes intercalaires depuis 1970



L'origine du temps TAI a été
fixée au 1 janvier 1958 à
00:00