

---

## Dynamique de Clairaut (1735-1742)

- 3 mémoires de dynamiques publiés dans les volumes de Histoire de l'Académie (1736-1742)
- Quels problèmes et quels principes ?
- Éléments contextuels sur les problèmes et les méthodes

## Dynamique de Clairaut (1735-1742)

### ■ *Solution de quelques Problèmes de Dynamique, 1736 (1739)*

Daté du 30 avril 1735

Tractaires comme point de départ d'une recherche plus vaste

- « les différentes Courbes qu'on peut décrire avec deux poids attachés à un fil » sur un plan poli avec un corps qui tracte (vitesse constante, variable, le long d'une droite, d'une courbe)
- « Cela fait, pour ainsi dire, une Classe de Problemes Phisico-mathématiques »

### ■ Sept Problèmes

2 corps reliés par « un fil ou une verge inflexible »

- Pb. I et III : Plan horizontal. Un corps dans une rainure droite (vitesse uniforme ou quelconque ) en tracte un autre.
- Pb II : Plan horizontal. Deux corps liés par un fil reçoivent des impulsions quelconques
- Pb IV à VII : Pendule double (plan horizontal et vertical)

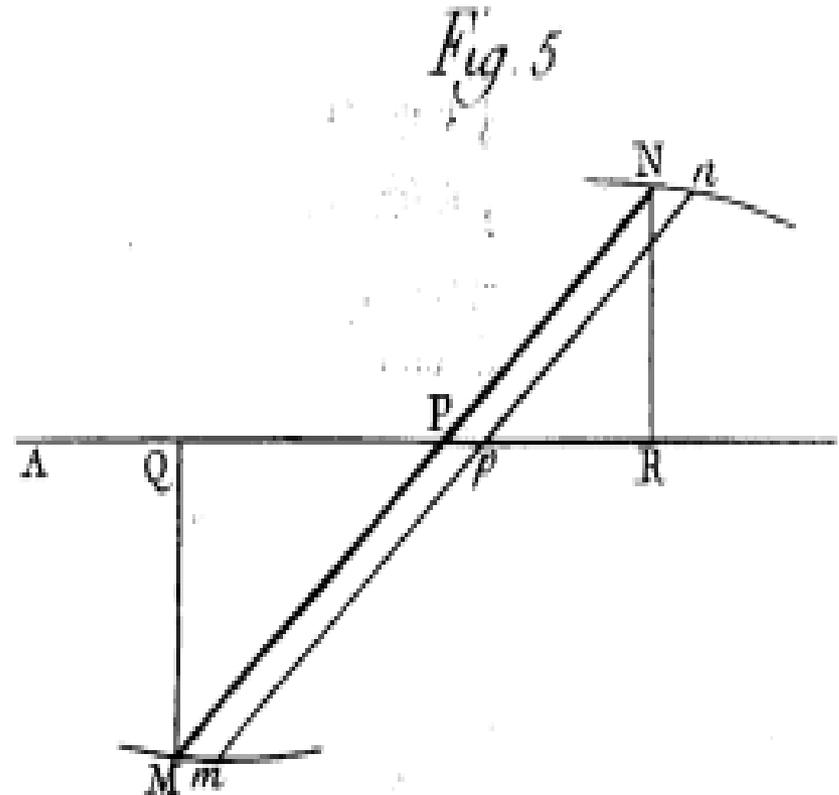
## Dynamique de Clairaut (1735-1742)

- Pb. II : plan horizontal, impulsions initiales qcq
  - « principe qu'on appelle la *Conservation des forces vives*, qui a été traité avec tant d'élégance par les célèbres Mrs Bernoulli Père & Fils »

$$Mv_M^2 + Nv_N^2 = K$$

$$dz = \pm \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

-Maupertuis ( Registres 4 mai 1735) : « Problème Dynamique proposé par M. Koenig »





## Dynamique de Clairaut (1735-1742)

- Problème VII : pendule double plan vertical

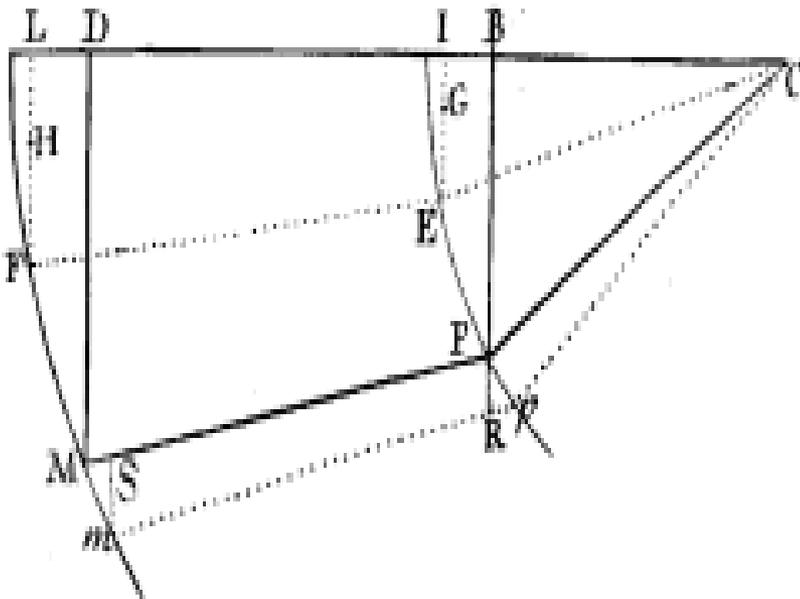
1742 : « on se sert [...] de ce Théoreme, *Que dans une situation quelconque des corps mûs, la somme des masses par les quarrés des vîtesses actuelles, que nous appellons la somme des Forces vives actuelles, est, non pas constante, comme dans le premier cas [plan horizontal], mais égale à la quantité des Forces vives des mêmes corps, en commençant leurs mouvements, plus à la somme des effets ou impulsions de la gravité, depuis le point d'où ils sont tombés jusqu'au lieu des corps dans la situation où on les considere* »

$$\Delta E_c = \text{somme } (W(P))$$

- une solution « plus aisée à entendre » qu'avec l'étude des liaisons et cette « méthode [...] pourroit résoudre aussi tous les Problemes précédents »
- 2 méthodes pour tous les problèmes : FV, forces liaisons

# Dynamique de Clairaut (1735-1742)

Fig. II



$$M.vv + \frac{P.vvdr^2}{ds^2} = 2g.(z-b)P + 2g.(y-c)M$$

- (A) Expression de  $v$  et  $vdv$   
 (B) Expression de la composante normale du fil

$$\frac{tdk}{Mds} = \frac{2gM.(y-c)ds^2 + 2gP(z-b)ds^2}{(Mds^2 + Pdr^2)R} + \frac{gdx}{ds}$$

- (C) Expression de sa composante tangentielle (PFD)

$$dt\left(\frac{tdl}{Mds} + \frac{gdy}{ds}\right) = dv$$

- (A)+(C)  $\rightarrow$  t  
 t + (B)  $\rightarrow$  courbe de M

Forces vives ; bilan de forces + PFD

## Dynamique de Clairaut (1735-1742)

- Méthodes générales : deux méthodes
- Approche newtonienne (forces liaisons)
  - Assimilation courbe polygonale, composition principe d'inertie et force liaison qui agit « comme une force attractive »
  - Référence Loi III des *Principes* : proportions masses/distances issue action-réaction
- Principe conservatif/Forces vives (généralisé)
  - Statut du principe

1738 : « Quoique les sentiments soient partagés parmi les plus grands Mathématiciens [...] sur l'estimation des Forces [...] tous semblent réunis au moins à croire que ce qu'on appelle Force vive [...] ne s'altère point dans le mouvement de plusieurs corps qui agissent les uns sur les autres [...] sans m'arrêter à examiner si les forces doivent s'exprimer de cette manière [ $mv^2$ ], ou si l'on doit prendre simplement les quantités de mouvement pour les forces [...] nous profiterons de l'uniformité de sentiment où l'on est pour le produit des masses par les quarrés des vîtesses »

# Dynamique de Clairaut (1735-1742)

- *Des centres d'oscillations dans des milieux résistants*, 1738 (1740)
  - Verge inflexible chargée de poids,  $pV^m + qV^n$ 
    - Recherche de la vitesse de la verge selon deux méthodes
    - Recherche du centre d'oscillation
- Ces deux méthodes révèlent influence des Bernoulli

# Dynamique de Clairaut (1735-1742)

- 1<sup>ère</sup> méthode : forces vives
- Composantes tangentielles des nouvelles forces de gravité

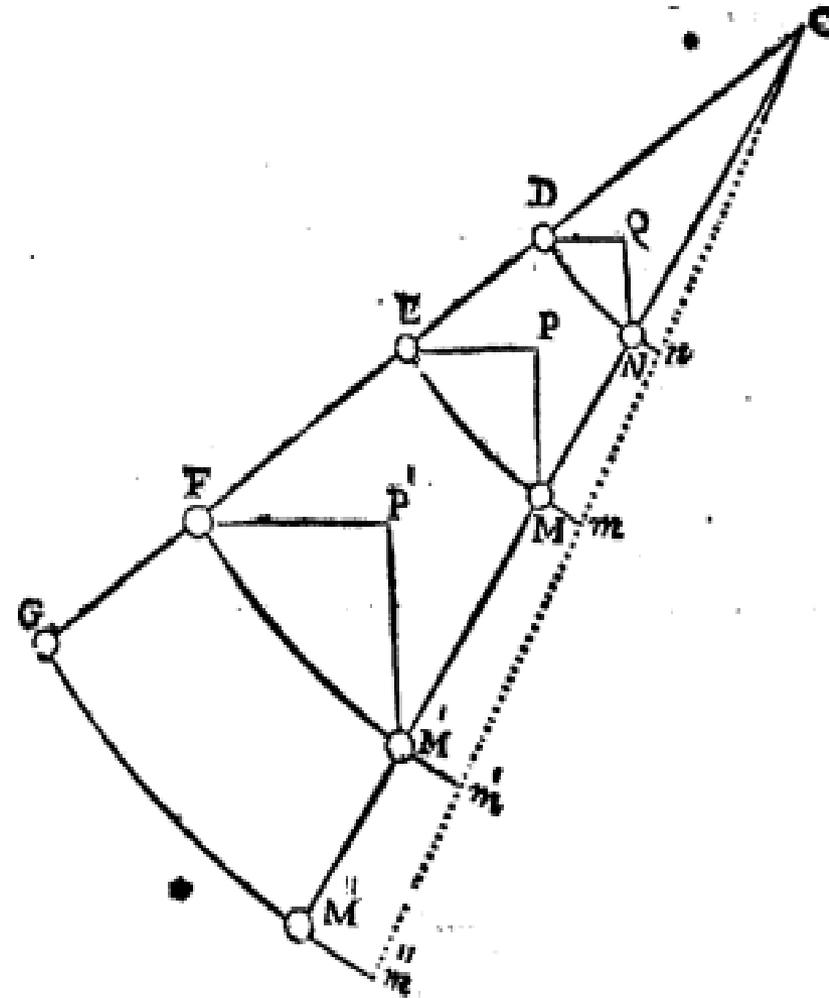
$$F = \frac{gdx}{ds} - \frac{pv^m a^m}{ir^m} - \frac{qv^n a^n}{ir^n}$$

- Travail de ces forces pour des chutes QN etc. = la force vive de chaque corps

$$\frac{2aEgx}{r} - \frac{2pEa^{m+1}}{ir^{m+1}} \int v^m ds - \frac{2qEa^{n+1}}{ir^{n+1}} \int v^n ds = \frac{aaEvv}{rr}$$

- « sans faire attention à la force de la verge » : Somme des travaux = FV actuelle - FV initiale

Donne expression de v



## Dynamique de Clairaut (1735-1742)

- 2<sup>ème</sup> méthode : équilibre des forces de liaisons
  - Prise en compte de « la force accélératrice ou retardatrice » provenant de « l'impulsion » de la verge
  - Travail élémentaire pour E et F
$$(F + \phi)ds \propto v dv \quad (F' + \phi')ds \propto v dv$$
  - CE=a, CB=b. Pour deux corps E et F intégration précédente donne deux termes du type

$$\int a \phi ds \quad \int b \phi' ds$$

« il est évident que la force qu'elle a [la verge] pour agir sur ces corps, se distribuera sur eux en sens contraire, en sorte que si elle accélère le corps E, elle retardera le corps F » :  $\phi' b + a \phi = 0$

Retrouve l'équation des FV

# Dynamique de Clairaut (1735-1742)

- Deux solutions ou une solution ?
  - Clairaut justifie que pour le Théorème des FV il ne faut pas tenir compte de « la force de la verge »
  - 2<sup>ème</sup> solution : mise en évidence de l'absence de travail des forces liaisons
  - Pour un problème semblable : D'Alembert dans son *Traité de dynamique* de 1743 utilise pour mettre en équation le problème une relation du type  $\phi' b + a\phi = 0$

# Dynamique de Clairaut (1735-1742)

- *Sur quelques principes qui donnent la solution d'un grand nombre de Problèmes de dynamique*, 1742 (1745)
  - Problèmes « m'ont été presque tous proposez par les sçavans Mrs Bernoulli & Euler »
  - Contient des Principes « ou entièrement nouveaux, ou du moins perfectionnez & étendus »
  - Synthèse :
    - Par le nombre de problèmes (11+des exemples)
    - Bilan des problèmes répandus dans la communauté
    - Bilan de méthodes
    - Utilisation de 4 principes ; 3 systématique

## Dynamique de Clairaut (1735-1742)

- Les Problèmes : trajectoires, vitesses
  - Pb I à VII et XI : corps en mouvement dans un tube en rotation (plan horizontal ou vertical)
  - Pb VIII : baguette chargée de deux corps fixes passée dans un anneau (plan horizontal)
  - Pb IX : poids sur un plan incliné en mouvement
  - Pb X : corps dans une rainure droite entraînant par un fil un autre corps

# Dynamique de Clairaut (1735-1742)

## ■ 1<sup>er</sup> Principe

- Application du PFD dans un référentiel non galiléen

(1) Référentiel mobile (tube) supposé fixe

(2) Recherche des forces dues à l'accélération du tube qui agissent sur le corps

(3) Application du PFD (« principe générale des forces accélératrices ») dans le référentiel du tube

$$m\vec{a}_{M / tube} = \vec{F}_{M / réf. absolu} - m\vec{a}_{tube / réf. absolu}$$

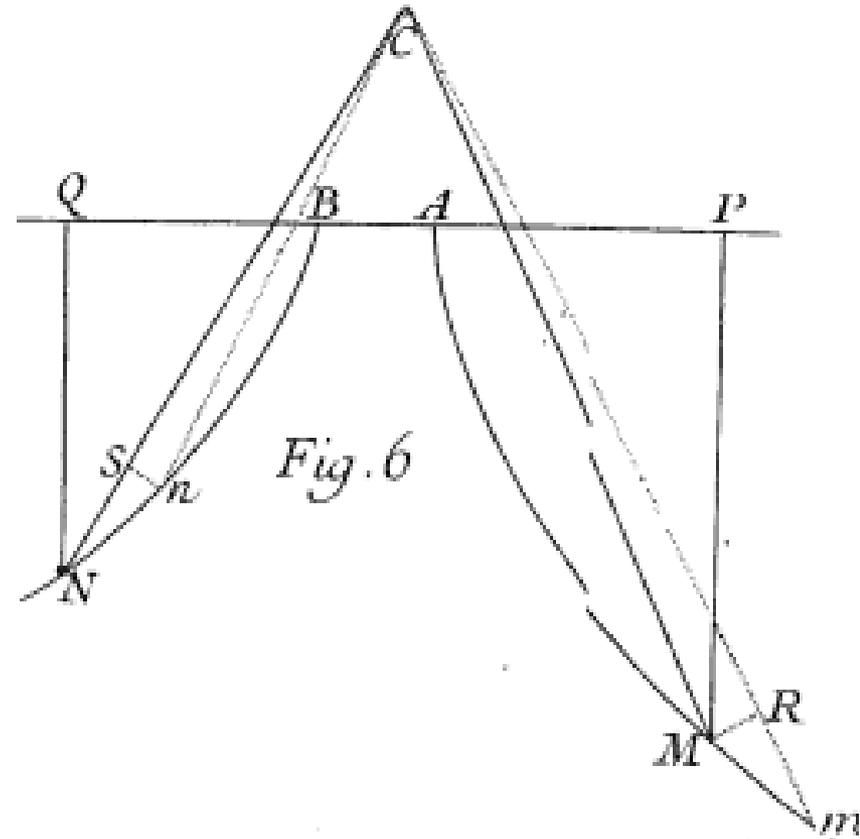
Etape 2 revient à chercher la force d'inertie d'entraînement : apparaît un terme force centrifuge : accélération corps dans le tube

Exemple : Plan, un corps dans un tube sans masse en rotation uniforme

$$\frac{ddy}{dt^2} = \frac{ydr^2}{dt^2} \quad \ddot{y} - \omega^2 y = 0$$

## Dynamique de Clairaut (1735-1742)

- 2<sup>ème</sup> Principe : Forces vives
  - Démonstration pour « un Problème qui m'a été communiqué par M. Jean Bernoulli » : trouver les vitesses de M et N
  - Bilan des forces et travaux élémentaires : même équation que l'application directe du FV sans tenir compte des liaisons
  - Ceci revient à faire s' « évanouir » les forces de liaisons (pas de travail) : généralisation à tous les systèmes
  - J. Bernoulli *N. Acta Eruditorum*, mai 1735



## Dynamique de Clairaut (1735-1742)

- 3<sup>ème</sup> Principe : centre d'oscillation
  - Réduction corps fini oscillant à une masse ponctuelle isochrone
- 4<sup>ème</sup> Principe : « général et direct »
  - Méthode du Mémoire de 1736 : équilibre des forces de liaisons

### Etude mouvement corps dans un tube en rotation

- Utilisation systématique combinaison P1+P2 et une variante de la solution obtenue avec P4.

# Dynamique de Clairaut (1735-1742)

- 1<sup>ère</sup> solution : P1 + P2
- (1) La force accélératrice du corps M dans la direction

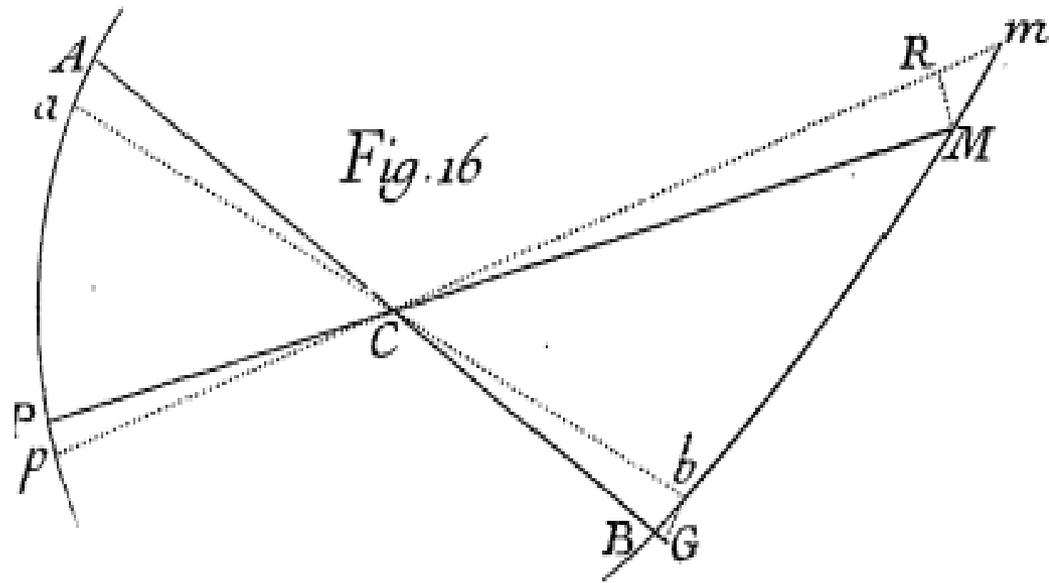
$$CM : \frac{ydx^2}{dt^2}$$

- (2) PFD

$$\left(\frac{ydx^2}{dt^2}\right)dt = \frac{ddy}{dt}$$

- (3) Conservation FV du système

$$yy \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + m \frac{dx^2}{dt^2} = K$$

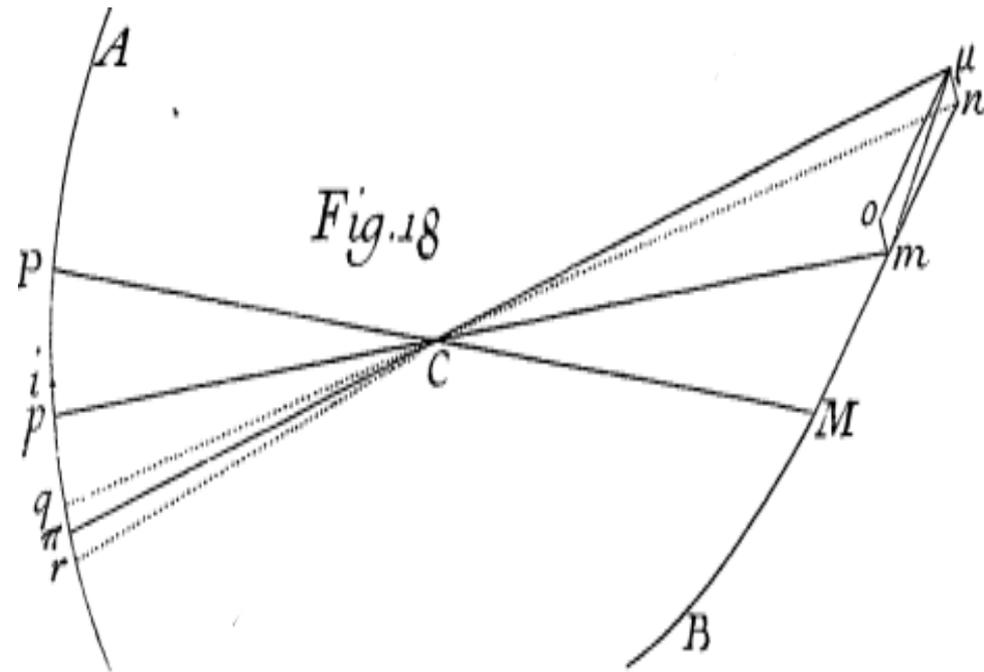


# Dynamique de Clairaut (1735-1742)

- $(2)+(3) = (m + yy)ddx + 2ydydx = 0$
- Soit  $(m + yy)\frac{dx}{dt} = b$
- Expression de la conservation du moment cinétique du système  $\vec{L} = C\vec{M} \wedge 1 \times \vec{v}_M + C\vec{P} \wedge m \times \vec{v}_P$
- Retrouvée au fil des calculs mais non énoncée comme un principe
- Lettre à Euler 23 avril 1743 : « Au reste j'ai été charmé de votre théorème des moments rotatoires, mais ce qui m'a piqué, c'est que si j'avais fait un peu de réflexion sur mes équations, je l'aurais trouvé aussi »

# Dynamique de Clairaut (1735-1742)

- 2<sup>ème</sup> solution : P4
  - « l'inflexibilité [...] s'opposant à ces mouvemens [inertiels], les corps P & M reçoivent des impulsions  $p_i$ ,  $m_o$ , dont les directions sont contraires & toutes deux perpendiculaires à  $mCp$  »
  - « par les principes connus »  
$$p_i \times P \times Cp = m_o \times Cm \times M$$
  - Loi du levier (Jacques Bernoulli, 1703)



# Dynamique de Clairaut (1735-1742)

- Calcul de  $\pi$  et  $m_0$ 
  - Lemme I (angle  $mC_n$ -angle  $MC_m$ ) donne  $\pi$  et  $m_0$  qui avec le levier donne  $(m + yy)dx = bdt$
  - Lemme II (calcul de  $C_n$ ) +  $(m + yy)dx = bdt$  donne l'équation de la trajectoire de M
  
- Bilan des 2 méthodes : retrouve deux axes développés en 1736 et 1738
  - P1+P2 : utilisation d'un principe conservatif (forces de liaisons ne travaillent pas)
  - P4 : étude des forces de liaisons
    - Lemmes géométriques pour une expression de l'effet des liaisons
    - Loi du levier (« principes connus »)

## Dynamique de Clairaut (1735-1742)

- D'Alembert, *Traité de dynamique*, 1743
  
- TD 1758 : « ce Principe & la plûpart des Problèmes suivans, étoient contenus dans un Mémoire que j'ai lû à l'Académie sur la fin de 1742 [...] Le même jour [...] M. Clairaut en présenta un, [...] ce Mémoire imprimé dans le Volume de 1742, a été lû après le mien, avec lequel il n'a d'ailleurs rien de commun »
  
- « a été lû après le mien » : chronologie (Registres de l'Académie)
  - 24 novembre jusqu'au 15 décembre 1742, D'Alembert lit « un mémoire sur un Principe général pour trouver le mouvement de plusieurs corps qui agissent les uns sur les autres »
  - Clairaut « prend date » le 22 décembre pour la publication d'un mémoire dans le volume de l'année 1742

# Dynamique de Clairaut (1735-1742)

- D'Alembert poursuit la lecture de son « mémoire » du 9 février jusqu'au 27 février 1743. A cette date « Mémoire ou Traité sur l'action des Corps »
- 2 mars 1743 : Début lecture de Clairaut
- 6 mars 1743 : D'Alembert « demande à l'Académie des commissaires pour l'examen de l'ouvrage qu'il veut faire imprimer » ; après-midi fait « parapher » par le Secrétaire la deuxième partie du livre
- 6 avril 1743 : Clairaut termine sa lecture

Texte de D'Alembert lu en premier

# Dynamique de Clairaut (1735-1742)

- « il n'a d'ailleurs rien de commun »

	Clairaut	D'Alembert
Pendule milieu résist.	Mémoire de 1738	Problème I, Cor. I (1758)
Mobile(s) dans un tube en rotation	-Problème I (1742) -Problème II (1742) -Problèmes III, IV (1742) -Problème VI (1742) -§ V, VI (1742)	-Problème II (2 éd.) -Remarque II (2 éd.) -Remarque IV (1758) -Remarque V (1758) -Remarque III (2 éd.)
Deux corps mus sur deux courbes reliés par un fil	- § X (1742)	-Problème III, Corollaire IV (2 éd.)
Mobile sur un plan en mouvement	-Problème IX (1742)	-Problème X (2 éd.)
Corps dans une rainure tractant un autre corps	-Problème III (1736), Problème X (1742)	-Problème IV, Cor. I (2 éd.)

# Dynamique de Clairaut (1735-1742)

- Peut justifier de « parapher »
- Des méthodes communes
  - Tube (Problème II du *Traité de dynamique*)
    - Lemme VII Cor. II = Lemmes I et II de Clairaut
    - Loi du levier aux forces liaisons comme application du principe de D'Alembert
  - Mobile sur plan en mouvement (Problème X du *Traité de dynamique*)

# Dynamique de Clairaut (1735-1742)

## La question de l'origine des problèmes

- Mobile sur un plan incliné en mouvement
  - Clairaut à Euler, 15 juillet 1742 : « Dans la dernière lettre de M. Daniel Bernoulli, il m'a proposé un problème assez curieux dont je lui ai envoyé la solution [...] »
  - Clairaut À Euler, 14 septembre 1742 : solutions « parfaitement d'accord » (Euler, Bernoulli)
  - Euler à Jean Bernoulli, 11 juillet 1730
  - Solution J. Bernoulli, Mém. St Pétersb. 1730 (1738)

# Dynamique de Clairaut (1735-1742)

- Corps dans un tube en rotation
  - D'après Histoire des Mémoires de l'Acad. de Berlin, 1745 (1746)
    - Euler le premier propose l'étude du mouvement d'un corps dans un tube à D. Bernoulli
    - Bernoulli propose à Euler avec un nombre quelconque de corps
    - Euler propose ce nouveau problème à Clairaut
    - Clairaut évoque ce type de Pb le 3 décembre 1742 et envoie sa solution à Euler le 28 déc.
    - J. Bernoulli à Euler, mars 1743 : tube avec un corps dans un plan =problème proposé par Koenig et envoie de sa solution à Clairaut et Maupertuis ; utilisation des lemmes géométriques

## Dynamique de Clairaut (1735-1742)

- Travaux s'inscrivent dans les réflexions contemporaines (des problèmes et des méthodes)
- Méthodes :
  - Un principe conservatif (forces vives voire moment angulaire)
  - Équilibre des forces de liaisons
- Ce double aspect : réseau Bernoulli
  - Jacques (MARS 1703) : levier
  - Jean (NAE 1735), Daniel (Acad. Berlin 1745) : absence de travail pour justifier principe conservatif
  - Réflexion sur les principes
- Formation newtonienne : forces de liaisons provoquent des déviations
- Euler (*Opusculi varii argumenti*, 1746) : Clairaut a « extraordinairement étendue cette partie de la mécanique »
- La question du principe unique : le non choix de Clairaut
- Clairaut à Euler, 7 décembre 1743 : « J'ai abandonné cette matière depuis le commencement de l'année et comme j'ai vu à peu près sur cette matière tout ce que je souhaitais, du moins parce qu'il faut faire une fin à tout, je ne trouve plus dans ces recherches de quoi me piquer assez pour quitter quelques autres recherches qui m'intéressent davantage »