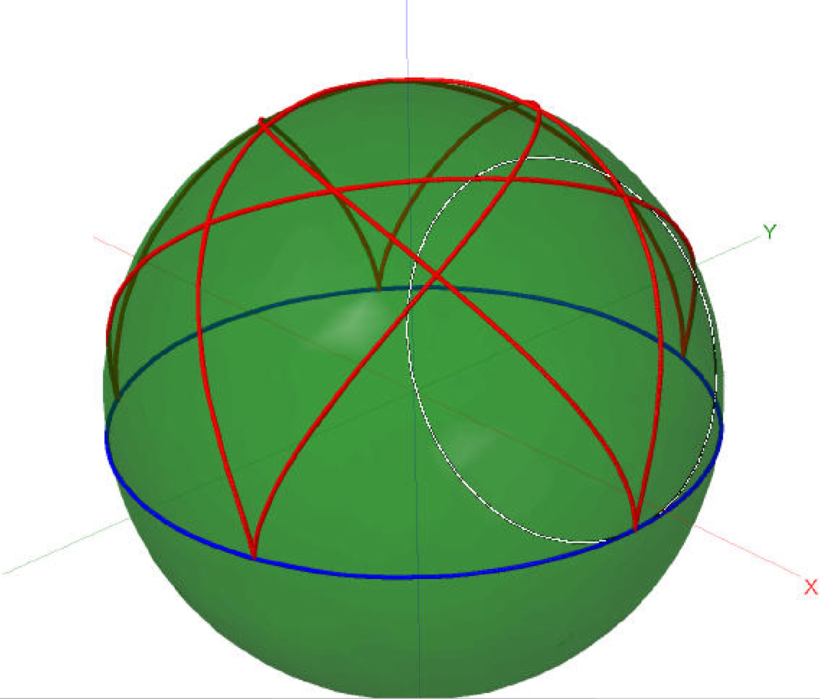
Les épicycloïdes sphériques : Clairaut, Maupertuis, Johann Bernoulli, Hermann, Nicole...

Jean Delcourt

Université de Cergy-Pontoise
& Archives Henri Poincaré

13 mai 2013


Y
X

Plan

1. Les personnages
2. Les épicycloïdes sphériques
   - La fenêtre de Viviani
   - Le problème d'Offenburg
3. Chronologie
   - Premier épisode
   - Deuxième épisode
4. Les mémoires
   - Le texte de Clairaut
   - Les autres mémoires
5. Annexe : Bernoulli

Les personnages en 1732

- Alexis-Clairaut a 19 ans
- Johann Bernoulli a 65 ans
- Maupertuis a 34 ans
- Jacob Hermann a 54 ans
- François Nicole a 49 ans

Les personnages en 1732

- Alexis-Clairaut a 19 ans
- Johann Bernoulli a 65 ans
- Maupertuis a 34 ans
- Jacob Hermann a 54 ans
- François Nicole a 49 ans

Clairaut, né le 13 mai 1713, entre à l'Académie Royale des Sciences en juillet 1731, par autorisation spéciale du Roi.

Recherches sur les courbes à double courbure (1731)

« J'ai crû devoir appeler ces sortes de courbes, courbes à double courbure, parce qu'en les considérant de la façon qu'on vient de dire elles participent pour ainsi dire toujours de la courbure de deux courbes. »

Il meurt le 17 mai 1765, à cinquante-deux ans.

Les personnages en 1732

- Alexis-Clairaut a 19 ans
- Johann Bernoulli a 65 ans
- Maupertuis a 34 ans
- Jacob Hermann a 54 ans
- François Nicole a 49 ans

Les personnages en 1732

- Alexis-Clairaut a 19 ans
- Johann Bernoulli a 65 ans
- Maupertuis a 34 ans
- Jacob Hermann a 54 ans
- François Nicole a 49 ans

Né en 1667 à Bâle, disciple de Leibniz, c'est un des plus grands mathématiciens du moment. De douze ans le cadet de son frère et concurrent (Jacob, décédé en 1705) il sera également en rivalité avec son propre fils, Daniel (qui étudiera également les épicycloïdes).
Deux autres de ses fils firent des mathématiques : Nicolas (II) et Johann (II), ainsi que son neveu (Nicolas I). Il décède en 1748, à Bâle.

Les personnages en 1732

- Alexis-Clairaut a 19 ans
- Johann Bernoulli a 65 ans
- Maupertuis a 34 ans
- Jacob Hermann a 54 ans
- François Nicole a 49 ans

Les personnages en 1732

- Alexis-Clairaut a 19 ans
- Johann Bernoulli a 65 ans
- Maupertuis a 34 ans
- Jacob Hermann a 54 ans
- François Nicole a 49 ans

Né en 1698, il est académicien depuis 1723. Ayant séjourné à Londres en 1728, il se fait le propagandiste des idées de Newton. Il est ami à la fois de Bernoulli et de Clairaut. En fin 1734, tous deux se rendront à Bâle et seront reçus par le maître. Ils seront les deux compères de l'expédition en Laponie.
La suite de sa carrière est marquée par des controverses : avec les Cassini, sur la figure de la terre ; avec König. Il décède en 1759.

Les personnages en 1732

- Alexis-Clairaut a 19 ans
- Johann Bernoulli a 65 ans
- Maupertuis a 34 ans
- Jacob Hermann a 54 ans
- François Nicole a 49 ans

Jacob Hermann (1678-1733)
Bâlois, élève de Jacob Bernoulli, il est professeur à l'université de Padoue en 1707, à Francfort, puis participe à la création de l'Académie de Saint-Petersbourg de 1724 à 1731 avant de rentrer à Bâle.

Les personnages en 1732

- Alexis-Clairaut a 19 ans
- Johann Bernoulli a 65 ans
- Maupertuis a 34 ans
- Jacob Hermann a 54 ans
- François Nicole a 49 ans

François Nicole (1683-1758) est un mathématicien français, membre de l'académie depuis 1707. Il fut un des rapporteurs du traité de Clairaut sur les « Courbes à double courbure ».

Plan

1 Les personnages

2 Les épicycloïdes sphériques
- La fenêtre de Viviani
- Le problème d'Offenburg

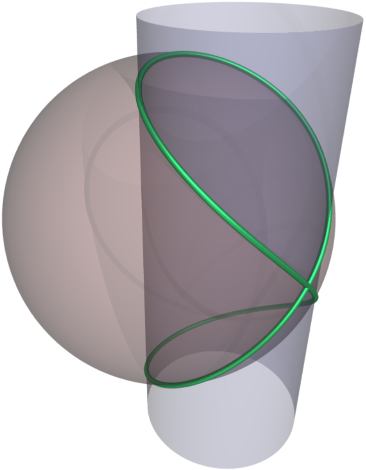
3 Chronologie
- Premier épisode
- Deuxième épisode

4 Les mémoires
- Le texte de Clairaut
- Les autres mémoires

5 Annexe : Bernoulli

Vincenzo Viviani (1622-1703)

Vincenzo Viviani est un disciple de Galilée. Mathématicien, historien des sciences, physicien.
En 1692, il lance un défi : *Aenigma geometricum de miro opificio testudinis quadrabilis hemisphaericae.* Il s'agit de « quarrer » une partie de la sphère, de façon « algébrique ».



En réalité, c'est le complémentaire de la fenêtre dans la demi-sphère qui est quarrable et vaut le carré du diamètre.

La relation de l'Abbé Bossut

Le problème de Viviani sur la quadrature de la voûte hémisphérique, en fit naître longtemps après un autre de pareille nature, proposé par un géomètre, d'ailleurs assez peu connu, nommé ***Ernest d'Offemburg*** *: c'était de percer une route hémisphérique d'un nombre quelconque de fenêtres de forme ovale avec cette condition que leurs contours fussent exprimés par des quantités algébriques ; ou bien, en d'autres termes, il fallait déterminer sur la surface d'une sphère des courbes algébriquement rectifiables. On voit d'abord que les courbes demandées ne peuvent pas être formées par l'intersection d'un plan avec la sphère, puisque toutes ces intersections, en quelque sens qu'on les fasse, ne sont jamais que des cercles : elles appartiennent à la classe des courbes à double courbure. Ce problème, quoique curieux et difficile, demeura intact pendant long-temps, et on ignore même si l'auteur l'avait résolu.*

Herman, dans un mémoire sur la rectification des épicycloïdes sphériques, crut que ces courbes satisfaisaient en général à la question d'Offenburg, ou qu'elles étaient algébriquement rectifiables.

210

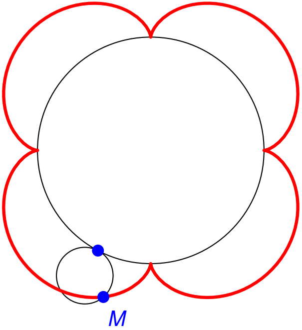
DE EPICYCLOIDIBUS
IN SUPERFICIE SPHAERICA
DESCRIPTIS.

Auctore
Jacobo Hermanno.

M. Nov. 1726. Triginta quatuor jam effluxere anni, ex quo aenigma geometricum de miro opificio testudinis quadrabilis Hemisphaericae Autore D. *Pio Lisci Posillo Geometra* Florentiae exiit in publicum. Sub hoc nomine, quod per anagramma significat *Postremo Galilaei Discipulo*, *Vincentius Vivianus* Magni Ducis Hetruriae Mathematicus latere voluit. Is enim impresso programmate aenigma suum peritioribus Analystis examinandum commendavit his verbis: Cujus (aenigmatis) divinatio a secretis artibus illustrium Analystarum vigentis aevi expectatur, quod in Geometriae pura historia versatus,

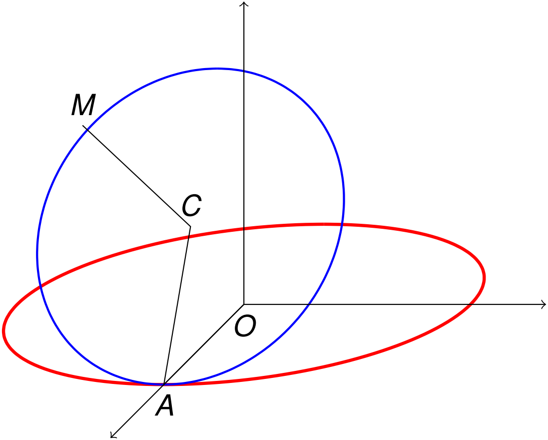
Épicycloïdes planes

Les épicycloïdes planes sont obtenues en faisant rouler un cercle sur un cercle. Si le rapport des rayons est rationnel, elles sont algébriques. Toute arche a une longueur qui s'exprime rationnellement en fonction du rapport des rayons.



Épicycloïdes sphériques

La définition est analogue à celle des épicycloïdes planes : un cercle de rayon a roule sans glisser sur un cercle fixe de rayon r, en restant dans un plan qui fait un angle constant avec le premier cercle.



Plan

1. Les personnages
2. Les épicycloïdes sphériques
   - La fenêtre de Viviani
   - Le problème d'Offenburg
3. Chronologie
   - Premier épisode
   - Deuxième épisode
4. Les mémoires
   - Le texte de Clairaut
   - Les autres mémoires
5. Annexe : Bernoulli

Un géomètre prometteur ?

- 1er avril 1731
- 23 avril 1731
- 1er septembre 1731
- 5 décembre 1731
- 30 décembre 1731

Bernoulli à Maupertuis

Dans le tems que la goutte me tourmentoit le plus, je reçus une lettre de Mr Clairaut où il dit, qu'il m'enverra un livre de sa façon qui venoit de sortir de dessous les presses, sur les courbes qui ne se peuvent tracer que sur les surfaces courbes, me priant de lui en dire son sentiment quand je l'aurai lu. [...] Dites moi donc ce que vous pensés de cet ouvrage et s'il répond à la haute idée que les savants de Paris ont conçuë de son auteur, beaucoup au delà de son age.

Un géomètre prometteur ?

- 1er avril 1731
- 23 avril 1731
- 1er septembre 1731
- 5 décembre 1731
- 30 décembre 1731

Maupertuis à Bernoulli

M. Clairaut m'avoit dit Monsieur que vous le renvoyiés à moy pour sçavoir ce que vous pensés de son livre. Rien ne me flatteroit plus que de penser que les jugements que je porte fussent conformes à ceux que vous porteriés mais il me faudrait avoir bien de la présomption pour le croire. Je n'ay point encor lu serieusement ce livre ; il me semble quil contient dassez bones choses mais ce quil y a de plus merveilleux est l'age de l'autheur ; ils avoient aussy en Angleterre lorsque j'y etois un geometre precoce.

Un géomètre prometteur ?

- 1er avril 1731
- 23 avril 1731
- 1er septembre 1731
- 5 décembre 1731
- 30 décembre 1731

Bernoulli à Cramer

On a lieu d'attendre de sa capacité des choses de plus grande importance, quand il sera parvenu à un age plus mur après ce bel echantillon qu'il vient de donner au public dans un age si tendre. [...] Quand au reste M. Clairaut feroit bien de pousser plus loin les recherches sur les courbes à double courbure, car il n'a fait encore qu'effleurer cette matière, quoique ce soit beaucoup pour son bas age, le plus difficile seroit de determiner des courbes sur une surface courbe donnée, qui fissent la fonction de quelque maximum ou minimum.

Un géomètre prometteur ?

- 1er avril 1731
- 23 avril 1731
- 1er septembre 1731
- 5 décembre 1731
- 30 décembre 1731

Bernoulli à Cramer

p ex. la courbe à double courbure de la plus vite descente, ou simplement celle qui soit la plus courte entre deux points sur une surface courbe donnée, ce que j'ai proposé il y a deja [de] longues années, et dont j'ai donné des solutions generales à Mrs de Maupertuis et Klingenstiern, [...]

Un géomètre prometteur ?

- 1er avril 1731
- 23 avril 1731
- 1er septembre 1731
- 5 décembre 1731
- 30 décembre 1731

Bernoulli à Cramer

Je serai curieux d'apprendre si Mr Clairaut aura resolu le probleme de determiner sur une surface courbe donnée une courbe à double courbure dont chaque arc ait la moindre longueur possible entre ses deux extremités [...] M. Clairaut pourroit aussi éprouver ces forces en tachant de resoudre le probleme des epicycloides spheriques dont parle Mr Herman dans le premier volume des Commentaires de Petersbourg page 210. ou par épicycloide spherique il entend la courbe à double courbure qui se decrit sur la surface d'une sphére [...]

Un géomètre prometteur ?

- 1er avril 1731
- 23 avril 1731
- 1er septembre 1731
- 5 décembre 1731
- 30 décembre 1731

Bernoulli à Maupertuis

Je ne sai si en faisant à la campagne un Extrait du premier Volume de l'Acad. de Petersbourg Vous n'avés pas remarqué de meme un autre paralogisme beaucoup plus important que Mr. Herman a commis qui gate toute sa Piece et qui rend fausse la solution qu'il pretend donner du probleme d'un certain Offenburg ; Cette piece se trouve page 210 où à l'imitation du probleme de Viviani sur la figure quarrable dans la surface hemispherique il entreprend d'y determiner des figures algebriques pour les fenetres du Dome,

Un géomètre prometteur ?

- 1er avril 1731
- 23 avril 1731
- 1er septembre 1731
- 5 décembre 1731
- 30 décembre 1731

Bernoulli à Maupertuis

... dont les circonferences soient absolument ou algebriquement rectifiables ; Il employe pour cela les Epicycloides spheriques, qu'il croit comme les Epicycloides ou hypocycloides planes (en prennant le point decrivant sur la circonference du cercle generateur) generalement rectifiables, mais son raisonnement renferme une erreur grossiere dont il devroit etre honteux ; cette erreur est à la fin de la page 215 où il dit interea vero describet BL sectorem LBl similem sectori Bβb, ce qui est absolument faux[..]

Un géomètre prometteur ?

- 1er avril 1731
- 23 avril 1731
- 1er septembre 1731
- 5 décembre 1731
- 30 décembre 1731

Bernoulli à Maupertuis

Comme la veritable maniere de trouver les dimensions des epicycloides spheriques m'a paru asses difficile j'ai eté curieux d'en chercher une methode, que j'ai enfin trouvée, cherchés la aussi pour voir si nous nous accordons, je mettrai la mienne par ecrit, que je Vous communiquerai si Vous la souhaittés, je trouve qu'il n'y a qu'un seul cercle dans la sphère à prendre pour le generateur, qui produise une Epicycloide algebriquement rectifiable. Mr. Clairaut devroit s'y appliquer aussi, parceque les courbes sont du genre des courbes à double courbure.

Maupertuis et Bernoulli

Maupertuis à Bernoulli, 28 janvier 1732

Je n'avois point remarqué la faute que vous avés decouverte dans la rectification des epicycloides spheriques et le mem. m'avoit paru joly ; cependant cette faute le gaste vilainement. Je ne suis pas en etat de resoudre le probl. dont vous me parlés sur cela, j'en parleray à m. Clairaut qui a en verité beaucoup de talent pour la geometrie et qui à ce que j'espere la remettra un jour en vigueur dans l'Acad.ie. Je vous seray infiniment obligé de m'envoyer ce que vous avés fait sur cela.

Maupertuis et Bernoulli

Maupertuis à Bernoulli, 10 mars 1732

Je vous rends mille graces pour votre bel ecrit sur les epicycloides et pour toutes les bontés que vous avés de me prodiguer vos decouvertes. Je peux vous asseurer que quelque soit votre paresse pour les mettre en ecrit, elle ne scauroit etre aussy grande que le desir que j'ay de les voir.[...] M. Herman n'est pas heureux dans les Mem. de Petersbourg ; je ne m'etonne pas que le pied glisse dans de pareilles matieres, mais je m'etonne qu'on soit si prompt à chanter victoire et à croire avoir fait plus que vous. Il est plaisant qu'il soit l'Offenburg du long silence du quel il paroist etonné. Tout cela me fait voir une chose que je scavois deja ; que l'amour propre et l'amour de la vaine gloire font faire bien des Beveues.

Maupertuis et Bernoulli

Maupertuis à Bernoulli- suite

Je crois bien que le probl. dont vous me parlés, de tracer sur la surface de la sphere une courbe algebrique et algebriquement rectifiable, independamment des epicycloides est un terrible probl. M. Clairaut à qui je l'avois proposé de votre part n'y a pas mordu. Vous entendés sans doute par algebriques, les courbes dont la projection sur un plan est algebrique. Quant à ce que vous me dittes d'essayer de trouver pareilles courbes sur la surface du cylindre, je prens cela pour un compliment et connois trop bien mes forces pour l'entreprendre.

Maupertuis et Bernoulli

Bernoulli à Maupertuis, 13 avril 1732

J'ai bien de la joye que mon ecrit sur les epicycloides ait eu le bonheur de vous plaire, je tacherai de vaincre ma paresse pour mettre en ecrit la seconde partie de cette matiere, qui est de trouver a priori et analytiquement sur la surface spherique une courbe algebrique qui soit algebriquement rectifiable, sans supposer l'epicycloide. [...] Vos reflexions faites à l'occasion des paralogismes de Mr. Herman sont excellentes ; ce bon homme toujours rempli de son imagination glorieuse d'avoir fait des merveilles par sa solution pretendu de son probleme proposé

Maupertuis et Bernoulli

Bernoulli à Maupertuis (suite)

...sous le nom d'Offenbourg, sera bien honteux quand il verra un jour son vilain pas de Clerc, commis dans cette affaire, et toutes ses autres erreurs : car je n'ai pas encore trouvé à propos de l'en avertir, pour le laisser jouir plus longtems de la douce contemplation de ses lauriers chimeriques. Vous verrés par l'analyse que je Vous enverrai, que le probleme [...] n'est pas aussi redoutable que Vous pensés ; De sorte que Mr. Clairaut, qui a fait son etude favorite des courbes à doubles courbures, devroit mordre à ce probleme plus que personne autre.

Maupertuis et Bernoulli

Bernoulli à Maupertuis, 2 mai

> *je Vous y ai promis ma solution directe du Probleme des Courbes algebriques et rectifiables à tracer sur la surface sphérique ; Pour m'acquitter de cette promesse, voici le cahier c'y joint qui contient ma methode : peutetre y trouverés vous de quoi repaitre Votre curiosité par la singularité de l'analyse dont je me suis servi.*

Maupertuis et Bernoulli

Maupertuis à Bernoulli, 12 mai 1732

> *Je me suis monsieur enhardy à chercher une courbe algebrique et rectifiable sur la surface de la sphere et voicy ce que j'ay fait sur cela ; faittes moy la grace de me dire si j'ay reussy ;[...] Voicy un papier que m. Clairaut à qui j'avois parlé de cela vient de m'envoyer. Il me prie de vous presenter ses respects.*

Il s'agit de l'article *Manière de trouver des courbes algébriques et rectifiables sur la surface d'un cône*.

Maupertuis et Bernoulli

Maupertuis à Bernoulli, 14 mai 1732

Je ne scay pas ce que vous aurés pensé de moy, lorsque vous aurés receu ma lettre de Lundy. 4 heures aprés l'avoir envoyée à la poste je receus celle que vous me faisiés l'honeur de m'ecrire du 8 où je trouvay votre solution du probl. des courbes rectifiables ; [...] je vous en envoye une solution qui paroist absolument copiée sur la vostre le mesme jour que je recois la vostre, et dans laquelle jusqu'aux memes signes sont nommées par les mesmes lettres. Il me semble qu'il y auroit là de quoy vous indigner, et me faire regarder come le plus impudent voleur, si je ne vous disois que le samedi 10 de ce mois, etant à l'Acad.ie je donnay ma solution par ecrit, precisement telle que je vous l'ay envoyée à m.rs Nicole et Clairaut.

Maupertuis et Bernoulli

Bernoulli à Maupertuis, 25 mai 1732

Votre derniere lettre du 14 de ce mois me fait voir que Vous étes dans une etrange inquietude à cause d'une fatalité qui a voulu que ma solution du Probleme des Courbes rectifiables sur la surface spherique etc. Vous fut livrée le meme jour que Votre precedente lettre contenant Votre solution du meme Probleme avoit eté envoyée à la poste ; Et comme les deux solutions sont dans le fond tirées d'une meme methode, Vous craignés vainement que cette identité ne me cause le soupçon comme si la Votre eut eté copiée sur la mienne. Non, Monsieur je n'ai jamais eu cette pensée, rassurés Vous donc et quittés Votre inquietude. (critiques sur le texte de Clairaut)

Clairaut s'intéresse aux épicycloïdes

24 septembre 1732, Maupertuis à Bernoulli

Ce que je vous demandois la permission de lire à l'Academye c'etoit l'un et l'autre de vos ecrits ; le 1.er sur les epicycloides spher. le 2.nd sur l'investigation des courbes rectifiables et algebriques etc. Il me semble qu'adoucissant les endroits où vous relevés m. Herman il n'auroit pas lieu de le trouver mauvais ; et cela me paroitroit d'autant plus à propos que m.rs Nicole et Clairaut ont entrepris aussy cette matiere, le dernier d'une maniere fort elegante, et qui je crois se raporte assez à la vostre, il doit vous la comuniquer ; pour m. Nicole je ne scay par quelle fatalité il s'est allé jetter dans des equations d'une page ; ils ont dessein l'un et l'autre de lire ce qu'ils ont fait sur cela à l'Academye : pour moy je ne feray de votre ecrit que l'usage que vous m'ordonnerés.

Clairaut écrit à Bernoulli

Pendant l'été, Clairaut à cherché à se faire inviter chez Bernoulli. Celui-ci a tout fait pour l'en dissuader... La goutte. Le premier octobre, Clairaut écrit donc pour présenter sa solution au problème posé à Cramer, celui de la ligne la plus courte, ainsi que sa solution du problème des épicycloïdes.

1er octobre 1732, Clairaut à Bernoulli

> *L'autre Probleme est une maniere d'avoir l'element des Epicicloïdes spheriques de Mr Herman. Comme dans mon petit traité des Courbes à doubles courbur j'avois resolu un probleme qui y a beaucoup de rapport, je crus quand j'en entend[ois] parler à mr de Maupertuis que je pourrois le trouver [par] mes equations generales, mais quand je l'eus un peu examiné je vis qu'il s'y falloit prendre d'une autre façon, la voici que j'ai l'honneur de vous montrer et que je vous supplie de vouloir bien examiner.*

2 Novembre 1732, Bernoulli à Clairaut

Votre solution Monsieur du second probleme sur les Epicycloides spheriques est aussi tres elegante, j'en suis charmé et je ne doute nullement que Vous ne la trouviés conforme à la mienne, tirée du mem fondement, excepté que la Votre est plus analytique et la mienne plus geometrique. Je vois avec etonnement, que Vous étes en état de resoudre les problemes qui donneroient de la besoigne aux plus habiles Analystes et où les plus versés et les plus habitués dans les calculs pourroient se tromper, comme il est arrivé en effet à Mr. Herman, qui a commis dans sa solution de ce meme probleme un grand paralogisme. Ce seroit donc bien sous Votre manuduction que je devrois me perfectioner dans la sublime Analyse ; si j'etois moins agé je Vous prierois volontiers de me donner des leçons au lieu que Vous m'en demandés, soyés persuadé que c'est sans flatterie que je parle de la sorte. Permettés que je Vous indique [...]

Plan

1 Les personnages

2 Les épicycloïdes sphériques
- La fenêtre de Viviani
- Le problème d'Offenburg

3 Chronologie
- Premier épisode
- Deuxième épisode

4 Les mémoires
- Le texte de Clairaut
- Les autres mémoires

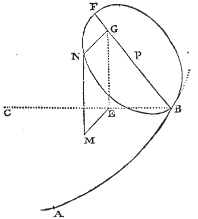
5 Annexe : Bernoulli

Le texte de Clairaut

DES EPICYCLOIDES SPHERIQUES.

Par M. CLAIRAUT.

I. SOIT un cercle *NB* roulant ſur un autre cercle *AB*, enſorte que ſon plan *NGB* faſſe toûjours le même angle avec le plan *CAB* du cercle *AB*, & ſoit *N* un des points de la circonférence *NB* qui décrit pendant ce roulement la courbe que l'on appelle *Epicycloïde ſphérique*. Je me propoſe d'abord de trouver l'expreſſion algébrique des arcs de cette courbe, ou, ce qui revient au même, la valeur d'un de ſes élémens quelconques.



Pour cela je mene *NG* perpendiculaire au diametre *FPB* du cercle roulant, *GE* perpendiculaire à *CB*, rayon du cercle *AB*, j'abbaiſſe auſſi l'ordonnée *NM* de l'Epicycloïde ſphérique, & je tire *ME* qui ſe trouve perpendiculaire à *BC*. Il eſt clair que l'élément cherché eſt la racine du quarré de l'élément de la courbe de projection, plus le quarré de la différence de *NM*. Le Probleme ſe réduit donc à trouver l'élément de la courbe de projection & l'ordonnée *NM* exprimée par la même variable.

La variable que je ferai entrer dans l'une & l'autre de ces expreſſions ſera *BG* que je nommerai *x*, & elle me donnera, en nommant auſſi *FB*, 2 *a*, *CB*, *r*, *BE* qui doit être en

Mem. 1732. Oo

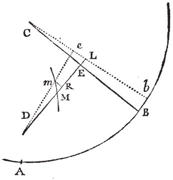
La variable que choisit Clairaut (notée x, est la grandeur BG, ce qui est un peu surprenant. Les grandeurs de la figure sont exprimées en fonction de x, des rayons r (cercle fixe), a (cercle mobile) et de n, cosinus de l'angle entre les plans des deux cercles. La condition de roulement s'exprime en disant que l'arc BN est égal à l'arc AB.

Le texte de Clairaut

290 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE

raiſon conſtante avec FB, nx, $GE = x\sqrt{(1-nn)}$, $GN = \sqrt{(2ax-xx)}$, $CE = r - nx$, NB qui eſt égal à AB par la propriété du roulement ſera $= \int \frac{adx}{\sqrt{(2ax-xx)}}$.

Pour trouver l'élément de la courbe de projection formée par les points M, je la conſidere d'une façon indépendante de l'Epicycloïde, & plus générale, en réſolvant ce Probleme: *Soit une courbe* Mm *déterminée, en prenant ſur le cercle* AB *des parties quelconques* AB *ſur les rayons* CB *des parties* BE, *dont la relation ſoit donnée avec* AB *& à l'extrémite de ces parties* BE *des perpendiculaires* EM *(toûjours dans le même plan) qui ayent auſſi une relation donnée avec* BE, *on demande l'expreſſion de l'élément de cette courbe.*



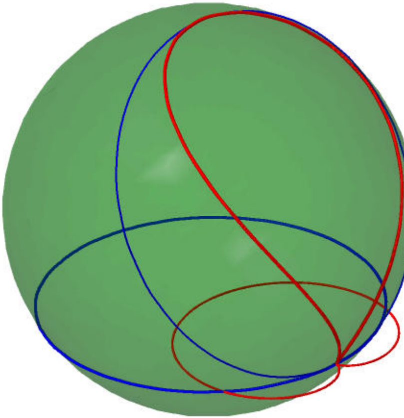
La ſolution de ce Probleme eſt bien facile, car que m ſoit un autre point de la courbe infiniment près de M, & me, eb, les deux coordonnées à ce point, & ſoient prolongées me & ME juſqu'au point de rencontre D. Soit de plus tiré Mm, & les petits arcs mR & EL des centres D & C, on aura $Bb = d(AB)$, $eL = d(BE)$, $me - ME = EL - MR = d(ME)$ & par les triangles CBb, CEL, eLD, $EL = \frac{CE \times d(AB)}{CB}$, $LD = \frac{CB \times d(BE)}{d(AB)}$, &c. par conſéquent $DM = \frac{CB \times d(BE)}{d(AB)} - ME$ & $MR = \frac{CE \times d(AB)}{CB} - d(ME)$, & par les triangles ſemblables DmR, DeL, $mR = \frac{d(BE) \times CB - ME \times d(AB)}{CB}$. Donc on aura $\sqrt{([\frac{CE \times d(AB)}{CB} - d(ME)]^2 + (\frac{CB \times d(BE) - ME \times d(AB)}{CB})^2)}$ pour l'élément

Par le moyen de triangles semblables, Clairaut calcule la longueur de l'arc de l'épicycloïde sphérique. Il obtient

$$dx\sqrt{\left(\frac{nr-a}{a}\right)^2 + 1 - nn + \frac{\left(\frac{r-an}{r}\right)^2 xx}{2ax-xx}}$$

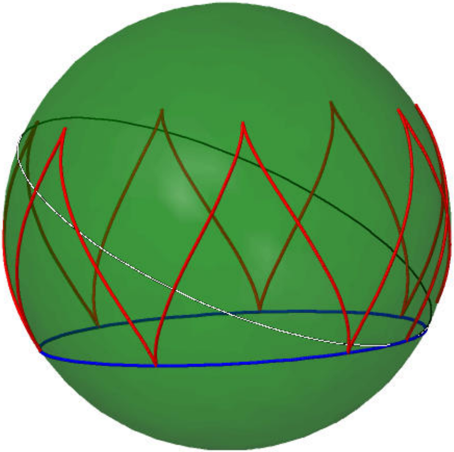
puis examine des cas particuliers. Le premier est celui, évident, où $n = \pm 1$: la courbe est alors une épicycloïde (ou hypocycloïde) ordinaire, puisque les deux cercles sont dans le même plan.

Le texte de Clairaut



Le second cas particulier est celui où $r = a$, les deux cercles ont même rayon. Clairaut annonce que dans ce cas, la projection de l'épicycloïde sphérique est algébriquement rectifiable, puisqu'elle est semblable à une épicycloïde plane. Il précise que c'est un cas particulier d'un résultat (p. 106) de ses *Recherches sur les courbes à double courbure*.

Le texte de Clairaut



Enfin, dernier cas particulier,

Si l'on fait $r = an$ dans la valeur générale de l'élément des Epicycloides, on la changera en $\frac{dx}{n}\sqrt{1 - nn}$ dont l'intégrale est $\frac{x}{n}\sqrt{1 - nn}$. D'où l'on voit qu'alors l'Epicycloïde est algébriquement rectifiable, & si de plus n est un nombre rationnel, l'Epicycloïde sera en même temps algébrique & rectifiable.

Le problème d'Offenburg est résolu ; il ne reste plus qu'à observer que $r = an$ signifie que le cercle roulant est un grand cercle de la sphère contenant l'épicycloïde sphérique. Comme le remarque Bernoulli, c'est exactement la situation de l'écliptique dans la sphère céleste.
Clairaut poursuit son mémoire en quarrant une arche d'épicycloïde sphérique... Ce n'est pas algébrique.
On ne sait pas quand Clairaut a lu son mémoire à l'Académie, sans doute en février-mars 1733. Le mémoire sur le cône avait été lu le 11 juin 1732.

Les autres mémoires : Bernoulli

Ce mémoire de Bernoulli résout le problème d'Offenburg, tout en donnant plus de détails, et en égratignant (gentiment) Herman. Ses calculs sont différents de ceux de Clairaut.
Il « résout » le problème de l'unicité de la solution, en recherchant une courbe sur la sphère dont l'élément d'arc soit proportionnel à celui de sa projection : il retrouve les épicycloïdes sphériques solutions.
En septembre, Maupertuis demande à Bernoulli la permission de lire son mémoire à l'académie. Bernoulli réponds favorablement le 9 octobre 1732. En 1734, après la mort d'Hermann, Maupertuis demande à Bernoulli d'insérer ses mémoires dans les mémoires de 1732.

PV du 17 mai 1732, Maupertuis

177

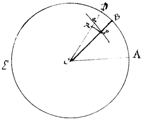
M. de Maupertuis a lû le Probléme suivant.

Il m'est trop glorieux de m'être rencontré avec M. Bernoulli pour ne pas communiquer la solution de son Probléme à la Compagnie, et il m'est de trop grande conséquence de ne pas passer pour plagiaire pour ne pas faire remarquer, que le même jour douze de May que j'envoyois ma solution à M. Bernoulli, je receus 4 heures après sa Lettre dattée de Basle du 8. May qui contenoit sa solution à laquelle la mienne est si semblable qu'elle paroit copiée sur elle. Que cependant deux des trois copies cy-jointes avoient été communiquées le 10 à M.rs Nicole et Clairaut, et la 3.e le 11. à M. l'Abbé Terrasson comme il paroit par leurs signatures.

Probléme.

Trouver sur la surface de la Sphere une Courbe algebrique rectifiable ?

Solution soit ABDE un grand Cercle de la Sphere dont le rayon $=1$, l'arc $AB = x$ CP l'ordonnée de la projection de la Courbe qu'on cherche $= y$, Pp perpendiculaire au plan de sa projection $= z$, $QR = dy$, $PR = ydx$, et l'Equation de la Sphere $zz = 1 - yy$. Cela posé.



La Longueur de la Courbe sur la surface Spherique dépendra de la Longueur de la Courbe de Projection PQ. Si $dy^2 + yydx^2 = mdz^2$, ou (mettant pour dz^2 sa valeur $\frac{yydy^2}{1-yy}$ tirée de l'Equation de la Sphere) $dy^2 + yydx^2 = \frac{myydy^2}{1-yy}$. Cette Courbe de Projection est

qui doit être la Differentielle d'un angle soit $\sqrt{(1-yy)}$ ... $\sqrt{(Myy \ldots)}$

$y = \frac{\sqrt{(zz-1)}}{\sqrt{(Mzz+1)}}$ $dy = \frac{(1-M)zdz}{(Mzz+1)^{\frac{3}{2}} \times \sqrt{(zz+1)}}$; Et l'on a

$dx = \frac{(1-M)dz}{(Mzz+1)\times(zz+1)} = \frac{(M-1)dz}{(zz+\frac{1}{M})\times(zz+1)} = \frac{dz}{1+zz} - \frac{dz}{\frac{1}{M}+zz}$;

$dx = \frac{dz}{1+zz} - \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{m+1}}} \times \frac{\sqrt{\frac{1}{m+1}} \cdot dz}{\frac{1}{m+1} + zz}$.

D'où l'on voit que la Courbe sera algebrique lorsque $\sqrt{\frac{1}{m+1}}$ un nombre rationel. Ce qu'il falloit trouver.

Maupertuis résout donc le problème réciproque, comme Bernoulli, en résolvant l'équation différentielle de façon plus efficace.
Le mercredi 3 décembre 1732, Maupertuis a lu la suite de son mémoire ; consacrée aux courbes sur la sphère dont la rectification dépend de la rectification du cercle ; il trouve en particulier les loxodromiques.

Les autres mémoires : Nicole

proportion $CA\,(n) \,.\, AQ\,(\sqrt{2nx}) :: DQ\,(r) \,.\, QI = \frac{r}{n}\sqrt{2nx}$.

On aura auſſi la corde $Qm = \sqrt{2rz}$, & pour avoir le rapport de la corde Qm à la corde QI, il faut trouver le rapport de z à x. Pour le trouver ce rapport, je remarque que l'arc QI eſt à l'arc Qm, comme DQ eſt à CA.

Ainſi pour trouver l'expreſſion en x de la corde Qm, cette partie du Probleme ſe réduit à trouver la corde d'un arc, lequel arc ſoit à un autre arc, dont la corde eſt donnée dans un rapport donné qui eſt ici de n à r.

Fig. 3. Pour cela ſoit un cercle $ACBD$, dont le diametre eſt AB; ſi l'on mene deux cordes quelconques AC, AD, & auſſi celles de leurs compléments CB & DB, on ſçait que $AC \times DB + AD \times BC = AB \times DC$. Ainſi ſi l'on nomme AB, $2r$, & $AD\,(b)$, par cette propoſition, lorſque l'arc AC eſt égal à l'arc AD, la corde CD de l'arc double ſera connuë. Par le moyen de la corde de l'arc double, on connoîtra celle de l'arc triple, & par celle-là la corde de l'arc quadruple, & enſuite celle de l'arc quintuple, ſextuple, &c.

Toutes ces cordes ſeront,

la corde de l'arc ſimple étant . . . . b.

Celle de l'arc double ſera. . . . . $\frac{b}{r}\sqrt{4rr-bb}$.

Du 3me . . . . $\frac{b}{rr} \times \overline{3rr-bb}$.

Du 4me. . . . . $\frac{b}{r^3}\sqrt{4rr-bb} \times \overline{2rr-bb}$.

Du 5me. . . . . $\frac{b}{r^4} \times \overline{5r^4-5rrbb+b^4}$.

Du 6me. . . . . $\frac{b}{r^5}\sqrt{4rr-bb} \times \overline{3r^4-4rrbb+b^4}$.

Du 7me. $\frac{b}{r^6} \times \overline{7r^6-14r^4bb+7r^3b^3-b^6}$.

Du 8me. . . . . $\frac{b}{r^7}\sqrt{4rr-bb} \times \overline{4r^6-10r^4bb+6rrbb-b^6}$.

Du 9me. . . . . $\frac{b}{r^8} \times \overline{9r^8-30r^6bb+27r^4b^4-9rrb^6+b^8}$.

Du 10me. . . . $\frac{b}{r^9}\sqrt{4rr-bb} \times \overline{5r^8-20r^6b^4+21r^4b^6-8rrb^8+b^{10}}$.

Du

MANIERE de déterminer la nature des roulettes formées sur la superficie convexe d'une sphère, & de déterminer celles qui sont géométriques, & celles qui sont rectifiables.

Il est lu le 20 décembre 1732, continué le 23 décembre. Il n'est pas encensé par le couple Maupertuis-Bernoulli.

Plan

1 Les personnages

2 Les épicycloïdes sphériques
- La fenêtre de Viviani
- Le problème d'Offenburg

3 Chronologie
- Premier épisode
- Deuxième épisode

4 Les mémoires
- Le texte de Clairaut
- Les autres mémoires

5 Annexe : Bernoulli

Bernoulli....

PROBLEME SUR LES E'PICYCLOIDES SPHE'RIQUES.

Par M. BERNOULLI, Profeſſeur de Mathématique à Bâle.

Voy. Acad. Petrop. vol. 1. p. 210.

SOIT le cercle immobile *HBED*, dont le centre eſt *C*, & le rayon *CB*. Soit ſur ce cercle un autre cercle mobile *BLA*, qui tourne de *E* par *B* vers *H*, dont le rayon eſt *GB*, & qui conſerve, en tournant, la même inclinaiſon ſur le plan du cercle immobile. Soit le commencement de la rotation en *E*, d'où un point *L*, dans la circonférence du cercle mobile, commence à décrire l'Epicycloïde *ELl*, qui ſera ſur quelque ſuperficie ſphérique ; on demande la rectification de l'Epicycloïde *ELl*, la maniere de la déterminer, &c. Fig. 1.

Préparation pour la Solution.

Conſidérons le cercle mobile dans une ſituation quelconque touchant en *B* le cercle immobile, & prêt à parvenir en *b*, infiniment proche de *B*, pendant que le point décrivant *L*, pris ſur la circonférence du cercle mobile, paſſe en *l*; & l'on aura *Ll* pour l'élement de l'Epicycloïde *ELl*.

Soit donc conçû le point du contact *B* eſtre venu en *b*, & l'arc du cercle mobile *BL*, tranſporté en *bl*, qui ſera augmenté de la particule *Bb*, élement commun aux deux cercles dans lequel ils ſe touchent. On aura donc, par la nature de la rotation, $Bb =$ la différence de l'arc *BL*, & partant $=$ l'arc $bl -$ l'arc *BL*. Des points *B* & *b* ſoient tirées les tangentes *BS*, *bs* communes aux deux cercles : *BS* ſera la commune interſection des plans du cercle mobile,

aux deux rayons *CB* & *GB*, & que l'angle *CBG* eſt la meſure de l'inclinaiſon mutuelle des plans, qui eſt donnée. Du point décrivant *L*, ſoit tirée la perpendiculaire *LS* ſur la tangente *BS*, & la perpendiculaire *LR* ſur le rayon *BG* du cercle mobile.

Soit de même, du point *l*, tirée la perpendiculaire *ls* ſur la tangente *bs*, & la perpendiculaire *lr* ſur le rayon *bg* dans la ſituation prochaine. Si maintenant des mêmes points *S* & *s*, on tire dans le plan immobile les droites *SO* & *sO* perpendiculaires aux tangentes *BS* & *bs*, & qu'on abbaiſſe des points *L* & *l* du cercle mobile, dans l'une & l'autre ſituation, les lignes *LN* & *ln* perpendiculaires au plan immobile ; le point *N* ſera dans la droite *SO*, & le point *n* dans *sO* ; & la courbe *ENn* qui paſſe par tous ces points ſera la projection ichnographique de l'Epicycloïde *ELl*. Car comme *BS* eſt perpendiculaire au plan qui paſſe par les droites *BC* & *BG*, de même *BS* eſt perpendiculaire au plan qui paſſe par les droites *SN* & *SL* : il faut entendre la même choſe des deux autres plans qui paſſent par *bC*, *bG*, & par *sn*, *sl*, auſquels plans *bs* eſt perpendiculaire, & l'on aura ainſi les angles *OSL*, *CBG*, *Cbg*, *Osl* égaux entr'eux, & chacun égal à l'inclinaiſon conſtante des plans du cercle mobile & de l'immobile. Soit mis *t* au point où *sO* coupe *BS*, & l'on aura le triangle *SOt* ſemblable au triangle *tbs* qui eſt ſemblable au triangle *BCb*, comme on le voit facilement. Enfin ſoit conçûë *NP* dans le plan immobile parallele à *St*.

SOLUTION.

Cette préparation faite ; ſoient le rayon du cercle immobile *CB* ou $Cb = a$, le rayon du cercle mobile *GB*, ou $gb = b$, le ſinus droit de l'inclinaiſon des deux plans $= g$, en prenant l'unité pour le ſinus total, ſon coſinus $= \sqrt{(1 - gg)} = h$,

Bernoulli...

l'abſciſſe dans le cercle mobile $BR=x$, ce qui donne RL ou $BS=\sqrt{(2bx-xx)}$, & partant $d(BR)=dx$, & $d(RL)$ ou $d(BS)=\frac{b-x}{\sqrt{(2bx-xx)}}dx$; $d(\text{arc } BL)=\frac{bdx}{\sqrt{(2bx-xx)}}$.

§. I. On trouvera le rayon de la ſphere ſur la ſuperficie de laquelle on décrit l'Epicycloïde, en prenant une quatriéme proportionnelle, au ſinus d'inclinaiſon des plans, au ſinus total, & à la diſtance CG des centres des deux cercles; or $CG=\sqrt{(aa-2hab+bb)}$; on aura donc le rayon de la ſphere $=\frac{1}{g}\sqrt{(aa-2hab+bb)}$. La démonſtration en eſt ſi facile, qu'elle ne mérite pas que je la mette ici.

§. II. Puiſque $d(BS)$ ou $\frac{b-x}{\sqrt{(2bx-xx)}}dx=bs-BS=bB-tS$; & que d(arc BL) ou $\frac{bdx}{\sqrt{(2bx-xx)}}$ = l'arc bl — l'arc BL = l'arc bE — l'arc $BE=bB$, on aura $tS=\frac{xdx}{\sqrt{(2bx-xx)}}$.

§. III. A cauſe des triangles ſemblables CBb, OSt, on a Bb ou $\frac{bdx}{\sqrt{(2bx-xx)}}$. St ou $\frac{xdx}{\sqrt{(2bx-xx)}}$ :: CB ou a . $OS=\frac{ax}{b}$.

§. IV. A cauſe des triangles ſemblables CBb, bst, on a CB ou a . bs ou $\sqrt{(2bx-xx)}$ :: Bb ou $\frac{bdx}{\sqrt{(2bx-xx)}}$. $ts=\frac{bdx}{a}$.

§. V. Maintenant à cauſe de l'angle droit LNS & de $LSN=ABC$ = l'inclinaiſon des deux plans, on aura $1 . h$ :: SL ou x . SN; d'où l'on tire $SN=hx$; donc $d(SN)=hdx$. Or $d(SN)=sn-SN=sn-tP=st+Pn$, donc $st+Pn=hdx$, & ôtant de part & d'autre st ou $\frac{bdx}{a}$, reſte $Pn=hdx-\frac{bdx}{a}=\left(\frac{ha-b}{a}\right)dx$.

§. VI. On a OS ou (§. 3.) $\frac{ax}{b}$. ON $(OS-SN)$ ou $\frac{ax}{b}-hx$ :: St, ou (§. 2.) $\frac{xdx}{\sqrt{(2bx-xx)}}$. NP, & ainſi $NP=\frac{(a-hb)xdx}{a\sqrt{(2bx-xx)}}$.

§. VIII. Ayant ainſi trouvé les trois éléments $NP=\frac{(a-hb).xdx}{a\sqrt{(2bx-xx)}}$ (§. 6.), $Pn=\frac{ha-b}{a}dx$ (§. 5.) & $d(LN)=gdx$ (§. précéd.) on aura premiérement l'élement de la courbe de projection, ou $Nn=\sqrt{(NP^2+Pn^2)}=dx\sqrt{\left[\frac{(a-hb)^2.x}{2aab-aax}+\frac{(ha-b)^2}{aa}\right]}$, & enſuite l'élément Ll de l'Epicycloïde $=\sqrt{[Nn^2+d(NL)^2]}=dx\sqrt{\left[\frac{(a-hb)^2.x}{2aab-aax}+\frac{(ha-b)^2}{aa}+gg\right]}$ = (à cauſe de $hh+gg=1$) $\frac{1}{a}dx\sqrt{\left[\frac{(a-hb)^2.x}{2b-x}+aa-2hab+bb\right]}$, dont l'intégrale donne la longueur de l'arc de l'Epicycloïde EL. Mais, $aa-2hab+bb$ étant $>(a-hb)^2$, on verra avec une légere attention, que cette intégrale en général dépend de la quadrature de l'hyperbole. *C. Q. F. T.*

§. IX. On voit par-là que M. Herman ſe trompe, lorſqu'il croit l'Epicycloïde ſphérique rectifiable algébriquement; ſon paralogiſme ſe trouve dans la ligne pénult. p. 215. là où il dit, *interea vero* (dum circulus generator rotatur) *deſcribet* BL *ſectorem* LBl *ſimilem ſectori* $B\beta b$. Ce qui n'eſt pas vrai; car la ligne Bb n'eſt pas dans le même plan que le cercle générateur BLA, mais Bb décline de ce plan de la quantité de l'angle de contact bBe; d'où il eſt facile de voir que cette déclinaiſon dans la rotation empêche le ſecteur LBl d'être ſemblable au ſecteur $B\beta b$.

§. X. *Corol. 1.* Si $h=1$, & par conſéquent $g=0$, on aura pour l'élément de la courbe cycloïdale $\frac{1}{a}dx\sqrt{\left[\frac{(a-b)^2.x}{2b-x}+(a-b)^2\right]}=\frac{a-b}{a}dx.\sqrt{\left(\frac{x}{2b-x}+1\right)}=\frac{a-b}{a}dx.\sqrt{\left(\frac{2b}{2b-x}\right)}$, dont l'intégrale (en lui faiſant la correction néceſſaire) donne $\frac{2a-2b}{a}\times[2b-\sqrt{(4bb-2bx)}]$; dans laquelle ſi l'on prend $x=2b$, on aura toute la demi-épicycloïde

Bernoulli...

épicycloïde $= \frac{4ab - 4bb}{a}$. Or $\frac{4ab-4bb}{a} . 4b :: a - b . a$, c'eſt-à-dire, toute la demi-épicycloïde eſt au double du diametre AB du cercle générateur, comme la différence des rayons de l'un & de l'autre cercle, eſt au rayon du cercle immobile ; c'eſt ce que trouve M. Herman dans ſon ſecond corollaire, & cela ne doit pas ſurprendre, parce que ſon paralogiſme ceſſe dans ce cas, où la cycloïde ceſſe d'être ſphérique, & devient plane ; car h étant $= 1 =$ ſinus total, l'inclinaiſon des plans s'évanouit, & ils s'appliquent l'un ſur l'autre, de maniére que la petite ligne Bb ſe trouve dans le plan du cercle mobile auſſi-bien que dans l'autre, cas dans lequel on peut conclure avec vérité que le ſecteur LBl (dans la Figure de M. Herman) ſera ſemblable au ſecteur $B\beta b$, ce qui n'eſt pas permis dans les Epicycloïdes ſphériques, à cauſe de la non-coïncidence des plans.

§. XI. Il y a encore un autre cas dans lequel la ſimilitude de ces ſecteurs a lieu ; c'eſt quand a ou le rayon du cercle immobile eſt infini, & qu'ainſi ſa circonférence dégénére en ligne droite coïncidente avec la tangente, & que par conſéquent la ligne Bb ſe confond avec Be qui eſt dans le même plan que le cercle mobile. Ainſi dans ce cas, il ſera vrai que toute la demi-cycloïde ſera au double du diametre AB, comme $\sqrt{(aa - 2hab + bb)}$ à a, ou ſimplement comme a à a ; car $\sqrt{(aa - 2hab + bb)}$ devient $= a$, à cauſe de a infini, par rapport à b & hb. On aura donc dans ce cas-là la demi-cycloïde qui n'eſt que la cycloïde ordinaire, égale au double du diametre. Ce qu'on ſçait, il y a long-temps.

Mais notre formule $\frac{1}{a} dx \sqrt{\left[\frac{(a-hb)^2 . x}{2b - x} + aa - 2hab + bb\right]}$ le donne auſſi, en effaçant les termes qui s'évanouiſſent devant a & aa ; car elle ſe change en celle-ci, $dx\sqrt{\left(\frac{2b}{2b-x}\right)}$, qui étant intégrée, donne $4b - 2\sqrt{(4bb - 2bx)}$ pour la longueur de l'arc de la cycloïde EL ; ainſi prenant $x =$ tout le diametre $2b$, on a la demi-cycloïde $= 4b$, c'eſt-à-dire, égal au double du diametre.

peuvent pas, comme nous avons dit à l'égard du premier, ſe rapporter à la claſſe des cycloïdes ſphériques : car en effet ces cycloïdes ſont toutes deux planes. Ainſi il n'y a pas une ſeule Epicycloïde ſphérique qui ait la longueur que preſcrit la regle tirée de cette Solution.

COROLLAIRE II.

§. XII. Soit maintenant $h = 0$, & par conſéquent $g = 1$, ce qui eſt le cas où les plans des cercles ſont perpendiculaires l'un à l'autre ; on aura l'élement de l'Epicycloïde $Ll = \frac{1}{a} dx \sqrt{\left(\frac{aax}{2b-x} + aa + bb\right)} = \frac{1}{a} dx \sqrt{\left(\frac{2aab + 2b^3 - bbx}{2b-x}\right)}$, dont l'intégrale, comme on a déja obſervé en général (§. 8.) dépend de la quadrature de l'hyperbole. Mais l'élement de la courbe de projection $Nn = \frac{1}{a} dx \sqrt{\left(\frac{2b^3 + aax - bbx}{2b - x}\right)}$ s'integre par la quadrature du cercle ſi $a > b$, par la quadrature de l'hyperbole ſi $a < b$, mais algébriquement ſi $a = b$; car on a dans ce cas $\int \frac{b}{a} dx \sqrt{\left(\frac{2b}{2b-x}\right)} = \frac{4bb}{a} - \frac{2b}{a}\sqrt{(4bb - 2bx)}$ $= 4b - 2\sqrt{(4bb - 2bx)}$. Et ainſi la courbe de projection de toute la demi-Epicycloïde $= \frac{4bb}{a} = 4b$, c'eſt-à-dire, égal au double du diametre du cercle générateur : ce qu'on peut auſſi déduire d'ailleurs ; car cette courbe de projection eſt une Epicycloïde plane, produite par la rotation du cercle ſur un cercle égal dans le même plan, le diametre de ce cercle étant ſous-double du diametre du cercle mobile générateur de l'Epicycloïde ſphérique, dont il eſt ici queſtion, & dont la courbe de projection eſt auſſi du genre des cauſtiques.

§. XIII. On a la rectification de la courbe de projection dans le cas $a = b$, non-ſeulement lorſque $h = 0$, mais quel que ſoit h ; car alors l'élément Nn que nous avons trouvé en général (§. 8.) $= \frac{1}{a} dx \sqrt{\left[\frac{(a-hb)^2 . x}{2b-x} + (ha - b)^2\right]}$

Bernoulli...

dans ce cas où $a=b$, devient $=(1-h)\,dx\,\sqrt{(\frac{2b}{2b-x})}$, dont l'intégrale est $(1-h)\times[4b-2\sqrt{(4bb-2bx)}]=$ l'arc EN; & lorsque $x=2b$, on aura la longueur de la demi-projettée, qui répond à la demi-épicycloïde $=4b-4hb$.

§. XIV. Au reste dans le cas $h=0$, lorsque les deux cercles sont perpendiculaires l'un à l'autre, on trouve le rayon de la sphere, sur la superficie de laquelle l'Epicycloïde ELl est décrite $=\sqrt{(aa+bb)}$. D'où l'on voit qu'aucun des deux cercles ne sçauroit être un grand cercle de la sphere; car l'un & l'autre de leurs rayons, tant a que b est $<\sqrt{(aa+bb)}$.

COROLLAIRE III.

§. XV. Pour trouver maintenant les cas de rectificabilité de l'Epicycloïde sphérique; je vois d'abord que si dans la formule générale (§. 8.) $Ll=\frac{1}{a}dx\sqrt{[\frac{(a-hb)^2}{2b-x}}+aa-2hab+bb]$, on fait $a=hb$, elle se change en $Ll=\frac{1}{hb}dx\sqrt{(bb-hhbb)}$, qui à cause de $1-hh=gg$, devient $\frac{gdx}{h}$; ainsi donc en intégrant simplement, on a la longueur de l'arc de l'Epicycloïde $=\frac{g}{h}x$, ce qui fait voir que chacun de ses arcs EL dans le cas $a=hb$ est à l'abscisse BR en raison donnée de g à h, c'est-à-dire, comme la tangente de l'inclinaison mutuelle du cercle mobile & de l'immobile, au sinus total; propriété si singuliére, que je ne sçais pas si aucune autre courbe peut l'avoir, c'est-à-dire, s'il y a aucune autre courbe dont l'abscisse prise indéfiniment soit en raison donnée à son arc correspondant. On a donc dans ce même rapport de g à h toute la demi-Epicycloïde, au diametre du cercle mobile ou générateur; ou, ce qui revient au même, toute la demi-Epicycloïde est au double du diametre comme $\frac{1}{2}g$ est à h, ce qui s'éloigne beaucoup du rapport que donne M. Herman dans son premier Corollaire, où il dit, que toute l'Epicycloïde (il entend par-là seulement

Hh ij

de $\frac{1}{2}g$ à h.

§. XVI. De plus, comme on a trouvé ci-dessus (§. 8.) l'élément de la projection $Nn=\frac{1}{a}dx\sqrt{[\frac{(a-hb)^2.x}{2b-x}}+(ha-b)^2]$ il est clair que cette courbe ENn est aussi algébriquement rectifiable, lorsque $a=hb$, car on a alors $Nn=\frac{1}{hb}dx\sqrt{(hhb-b)^2}$ ou (à cause de $hh-1=-gg$) $=\frac{1}{hb}dx\sqrt{g^4bb}=\frac{ggdx}{h}$, dont l'intégrale donne la courbe $ENn=\frac{gg}{h}x$. D'où l'on voit que dans ce cas l'Epicycloïde est à la courbe de projection correspondante, comme $\frac{gx}{h}$ à $\frac{ggx}{h}$, ou comme 1 à g, c'est-à-dire, comme le sinus total au sinus d'inclinaison des cercles : & ces trois lignes, l'épicycloïde, la courbe de projection, & l'abscisse correspondante, sont entre elles comme ces trois termes pris dans le même ordre, g, gg, & h.

SCHOLIE I.

§. XVII. Ce cas ou $a=hb$ est le seul qui rend l'Epicycloïde sphérique algébriquement rectifiable; & si de plus les rayons des deux cercles sont commensurables entre eux, c'est-à-dire, si a ou hb est à b, ou h à 1, où le cosinus d'inclinaison des plans est au sinus total comme nombre à nombre, l'Epicycloïde sera algébrique. Mais c'est ici une chose digne de remarque, qu'ayant pris à volonté pour le cercle immobile, quelqu'un des petits cercles de la sphere, le cercle mobile sera toûjours un grand cercle de la même sphere; car ces deux cercles en se touchant, ont l'inclinaison requise pour que $a=hb$, comme il est facile de voir ; car il est clair qu'ayant tiré des rayons des deux centres au point commun d'attouchement, on a le rayon du petit cercle, au rayon du

Bernoulli...

grand, comme le cosinus d'inclinaison, au sinus total, c'est-à-dire, a à b comme h à 1, & par conséquent $a = hb$: ce qu'on voit aussi par le §. 1, où les rayons du cercle immobile & du mobile a & b étant donnés & l'inclinaison de leurs plans, nous avons trouvé en général le rayon de la sphere $= \frac{1}{g} \sqrt{(aa - 2hab + bb)}$; car si pour a on substituë hb, on aura $\frac{1}{g} \sqrt{(aa - 2hab + bb)} = \frac{1}{g} \sqrt{(bb - hhbb)} =$ (à cause de $1 - hh = gg$) $\frac{1}{g} \sqrt{(ggbb)} = \frac{gb}{g} = b$.

Scholie II.

§. XVIII. On peut rendre sensible la maniére dont cette Epicycloïde sphérique se décrit par un exemple assés élégant : concevons dans la Sphere céleste l'Ecliptique qui dans le point le plus bas touche le Tropique du Capricorne, faisant avec son plan une inclinaison de 23 degrés $\frac{1}{2}$.

Maintenant on peut concevoir de deux maniéres la génération de l'Epicycloïde ; car ou l'on peut supposer que la Sphere & le Tropique demeurant immobiles, l'Ecliptique se meut en tournant sur le Tropique, tandis que chacun de ses points, par exemple, celui qui est au commencement du Capricorne décrit l'Epicycloïde sphérique qu'on demande : ou bien, ce qui fait le même effet, on peut supposer que la Sphere entiére avec tous ses cercles conservant entre eux la même situation, se meut d'un mouvement uniforme autour de l'Axe du Monde d'Orient en Occident, pendant que quelque point mobile partant du commencement du Capricorne, s'avance d'un mouvement propre & uniforme dans l'Ecliptique d'Occident en Orient, avec une vîtesse uniforme & égale à celle d'un des points du Tropique. Car on voit que par ce moyen le point mobile dans l'Ecliptique décrira la même courbe qui avoit été décrite de la premiére maniére. Cette seconde maniére a une certaine analogie avec le mouvement du Soleil composé du mouvement diurne ou commun & du mouvement propre selon le systeme de Ptolémée

révolution du Soleil dans l'Ecliptique fût au temps d'une révolution de la Sphere qui fait la longueur du jour naturel, dans le même rapport qu'a le rayon de l'Ecliptique ou le rayon de la Sphere au rayon du Tropique, ou comme le sinus total au cosinus de 23 degrés $\frac{1}{2}$, le centre du Soleil décriroit exactement une de nos Epicycloïdes sphériques algébriquement rectifiables. Mais comme le Soleil a son mouvement propre dans l'Ecliptique beaucoup plus lent qu'il ne faudroit pour cela, la ligne que le centre du Soleil décrit entre les deux Tropiques pendant l'espace d'une année par le mouvement combiné du mouvement commun & du mouvement propre, sera du genre des *Cycloïdes allongées* comme les Géometres les appellent, plûtôt que du genre des *Spirales* sous la forme desquelles Tycho les a conçûës.

Scholie III.

§. XIX. Après tout cela, on voit comment il faut satisfaire au probleme de M. Offenburg, dans lequel on demande de faire à une voûte hémisphérique, des fenêtres ovales, dont le contour de chacune soit absolument rectifiable. Car quoique les Epicycloïdes sphériques, décrites selon la condition du Corollaire 3, n'ayent pas la forme d'ovales ; cependant de deux ou plusieurs de leurs parties jointes & disposées comme il faut, on formera facilement une figure fermée & ovale, pourvû qu'on observe dans la description de notre Epicycloïde, de choisir pour le cercle immobile quelqu'un des petits cercles de la sphere, dont le rayon soit au rayon de la sphere, comme nombre à nombre, ce qui fera qu'on aura la construction géométrique de l'Epicycloïde, & tout à la fois sa longueur absolument rectifiable. *C. Q. F. T.*

Scholie IV.

§. XX. Quant à la description ichnographique de l'Epi-

Bernoulli...

cycloïde ſphérique, c'eſt-à-dire, la maniere de déterminer la courbe de projection dans un plan, en abbaiſſant de chaque point de l'Epicycloïde, des perpendiculaires ſur le plan du cercle immobile, conſidéré comme la baſe; voici comment cela ſe fait. Soit décrit ſéparément un cercle $\alpha\lambda\beta$ égal au cercle mobile, & de quelque point fixe λ qui repréſente le commencement de la rotation, ſoit pris un arc $\lambda\beta$ à volonté, par le point β ſoit tiré le diametre $\beta\alpha$ auquel ſoit tirée la perpendiculaire $\lambda\tau$; enſuite du point E du cercle immobile qui ſoit l'origine commune de l'Epicycloïde & de la courbe projettée qu'on veut conſtruire, ſoit pris l'arc $EB =$ l'arc $\lambda\beta$, ce qui ſe peut toûjours faire algébriquement, puiſque, comme on le ſuppoſe, les rayons des cercles ſont commenſurables: enſuite du point B ayant mené la tangente $BS = \tau\lambda$, ſoit élevée au point S, dans le plan du cercle immobile, la perpendiculaire SN qui ſoit à $\beta\tau$ comme h à 1, c'eſt-à-dire, comme le ſinus complément d'inclinaiſon des deux cercles, au ſinus total. Cela fait, le point N ſera dans la courbe ENn de projection qu'on cherche, & ainſi on aura tant de ſes points qu'on voudra. La démonſtration eſt claire d'elle-même. Fig. 2.

REMARQUE.

§. XXI. Quoique, dans la Figure qui ſert à ce Mémoire, on ſuppoſe aigu l'angle CBG qui marque l'inclinaiſon des plans, & que le calcul ait été fait pour cette ſuppoſition, il faut cependant avertir que tout ce qui en réſulte ſe peut facilement accommoder à l'hypotheſe de l'angle CBG obtus, en changeant par-tout le ſigne de la lettre h d'une ſeule dimenſion, puiſque le coſinus de l'angle obtus devient négatif, ſi auparavant on avoit ſuppoſé dans l'analyſe l'aigu poſitif. D'où l'on voit que de toutes ces Epicycloïdes ſphériques, dans leſquelles l'angle d'inclinaiſon eſt obtus, il n'y en a aucune qui ſoit algébriquement ou abſolument rectifiable; car on auroit $a = -hb$, c'eſt-à-dire, le rayon du cercle mobile ſeroit négatif, & par conſéquent impoſſible; ce qui paroît auſſi, parce que le cercle mobile qui doit être un grand

cercles ſe touchent, comme ſont par ex. l'Ecliptique & les Tropiques.

§. XXII. Il faut encore remarquer que la méthode que nous venons de donner, s'applique auſſi facilement aux Epicycloïdes ſphériques allongées & raccourcies, c'eſt-à-dire, lorſque le point décrivant L, au lieu d'être pris ſur la circonférence du cercle mobile, eſt pris au dedans ou au dehors; ou, ce qui revient au même, ſi l'on conçoit le cercle mobile ALB gliſſer au lieu de rouler, de maniére qu'un de ſes points B, pris à l'extrémité du diametre AB, raſe continuellement la circonférence du cercle immobile EBH, pendant que quelque point L de la circonférence du cercle mobile ſe meut d'un mouvement uniforme de B vers A paſſant par L, & avec une vîteſſe qui ſoit à la vîteſſe du point raſant B, qui s'avance de E vers H par B, comme 1 à n, ce qui fait que (prenant le point E pour l'origine commune de l'un & l'autre mouvement & de l'Epicycloïde qu'on décrit) l'arc BL eſt à l'arc EB dans le même rapport de 1 à n. Car par ce mouvement compoſé, le point L décrira une Epicycloïde ſphérique, allongée ſi n eſt plus grande que l'unité, & raccourcie ſi n eſt moindre; & ſi n eſt égale à l'unité, ce ſera l'Epicycloïde ordinaire dont nous avons parlé juſqu'ici.

§. XXIII. Je dis donc que par des calculs ſemblables aux précédents, on trouvera l'élément Nn de la courbe de projection $= \frac{1}{a} dx \sqrt{\left[\frac{(nab - ab + ax - nhbx)^2}{2bx - xx} + \frac{(ha - nb)^2}{1}\right]}$, & l'élément de l'Epicycloïde $Ll = \frac{1}{a} dx \sqrt{\left[\frac{(nab - ab + ax - nhbx)^2}{2bx - xx} + aa - 2nhab + nnbb\right]}$. Je n'entre point dans le détail des cas particuliers, on voit ſeulement qu'il n'y a rien qui puiſſe faire conclure qu'aucune de ces Epicycloïdes, ſoit allongées, ſoit raccourcies, ſoit abſolument ou algébriquement rectifiable. Pour leur conſtruction, on l'a par la maniére même dont elles ſe décrivent.

Sur

Bernoulli...

Sur les Courbes algébriques & rectifiables tracées sur une surface sphérique.

PROBLEME.

Décrire sur une surface sphérique une Courbe algébrique qui soit rectifiable.

I. SOLUT. Soit RST un grand Cercle de la Sphere supposé parallele à l'horison pour aider l'imagination, dont le centre est C. De chaque point $a, b, e, d,$ de la courbe cherchée soient conçûë abbaissées sur le plan du cercle RST les perpendiculaires $aA, bB, eE, dD,$ qui forment la courbe de projection $ABED$, dont il faut maintenant chercher la nature, & qu'il faut décrire, parce qu'on décrira ensuite facilement la courbe cherchée, en élevant perpendiculairement sur le plan du cercle de chaque point B les droites Bb qui rencontrent la superficie sphérique dans les points b. Pour cela, soit conçûë la courbe de projection ABD étenduë séparément en ligne droite $\alpha\beta\delta$ qui soit comme l'axe des appliquées $\alpha a, \beta b, \varepsilon e, \delta d,$ égales respectivement aux droites $Aa, Bb, Ee, Dd,$ prenant $\alpha\beta = AB$, $\alpha\varepsilon = AE$, &c. D'où résulte une nouvelle courbe $abed$, dont les parties ab, ae, &c. seront respectivement égales aux arcs $ab, ae,$ &c. de la courbe sur la superficie sphérique. Fig. 3. & 4.

II. Cela supposé, je change le Probleme proposé en celui-ci : Transformer l'Axe rectiligne $\alpha\beta\delta$ en un curviligne ABD, de maniére qu'ayant pris un arc quelconque AB égal à une abscisse quelconque $\alpha\beta$, la hauteur Bb du point b sur le point B de la projection, soit égale à l'appliquée d'une ligne donnée abd. Si donc abd est algébrique, & de plus algébriquement rectifiable, comme le sont les droites & une infinité de paraboles; de plus si parmi toutes les lignes abd, il s'en trouve quelqu'une qui admette un axe courbe ABD constructible algébriquement, l'on voit que cette courbe décrite sur la surface de la Sphere, dont ABD est la projection,

briques rectifiables abd, sçavoir la ligne droite (que je trouve très propre à nôtre dessein, car une autre comme la seconde parabole cubicale qui est aussi rectifiable, ne réussit pas). Ayant tirée df parallele à l'axe $\delta\alpha$, soit la raison de af à fd comme 1 à n, & ainsi $fa \,.\, da :: 1 \,.\, \sqrt{(nn+1)}$, ou (faisant $nn+1 = mm$) $af \,.\, da :: 1 \,.\, m$. Maintenant pour changer l'axe rectiligne $\alpha\beta\delta$ dans le curviligne ABD, ayant tiré du centre C les rayons infiniment proches CS, CT, qui coupent la courbe ABD dans les points $B, E,$ & prenant R pour le commencement des arcs variables $RS, RT,$ &c. soit fait $RS = x$, $CB = y$, le rayon $CS = 1$, $ST = dx$, $FE = dy$; ayant décrit le petit arc concentrique BF qui sera $= y\,dx$, on aura $BE = \sqrt{(yy\,dx^2 + dy^2)} = \beta\varepsilon$, la hauteur du point b sur le plan du cercle, c'est-à-dire, $bB = \sqrt{(1-yy)}$, & sa différence $d(bB) = \frac{-y\,dy}{\sqrt{(1-yy)}}$.

IV. Puisque donc $d(bB) \,.\, BE :: af \,.\, df :: 1 \,.\, n$, l'on aura $\frac{-y\,dy}{\sqrt{(1-yy)}} \,.\, \sqrt{(yy\,dx^2+dy^2)} :: 1 \,.\, n$; & $\sqrt{(yy\,dx^2+dy^2)} = \frac{-ny\,dy}{\sqrt{(1-yy)}}$, ou $yy\,dx^2 + dy^2 = \frac{nnyy\,dy^2}{1-yy}$. Donc $yy\,dx^2 = \frac{nnyy\,dy^2}{1-yy} - dy^2 = \frac{(nn+1)\,yy\,dy^2 - dy^2}{1-yy}$, & par-là on aura $dx = \frac{dy\sqrt{(nnyy+yy-1)}}{y\sqrt{(1-yy)}} =$ (à cause de $nn+1=mm$) $\frac{dy\sqrt{(mmyy-1)}}{y\sqrt{(1-yy)}} = \frac{mmyy\,dy - dy}{y\sqrt{[(1-yy)\times(mmyy-1)]}} = \frac{mmy\,dy}{\sqrt{[(1-yy)\times(mmyy-1)]}} - \frac{dy}{y\sqrt{[(1-yy)\times(mmyy-1)]}}$.

V. La premiére partie s'integre comme il suit. Soit fait $yy = 2z$, & l'on aura $\frac{mmy\,dy}{\sqrt{[(1-yy)\times(mmyy-1)]}} = \frac{mm\,dz}{\sqrt{[(1-2z)\times(2mmz-1)]}} = \frac{mm\,dz}{\sqrt{[-1+(2mm+2)z-4mmzz]}} = \frac{mm\,dz}{\sqrt{\left[\frac{(mm-1)^2}{4mm} - \left(2mz - \frac{mm-1}{2m}\right)^2\right]}} = \frac{2m^3\,dz : (mm-1)}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{4mm}{mm-1}z - \frac{mm+1}{mm-1}\right)^2\right]}}$

Bernoulli...

DES SCIENCES. 251

$= $ (en ſubſtituant pour $2z$ ſa valeur yy) $\dfrac{2m^3ydy : (mm-1)}{\sqrt{[1-(\frac{2mm}{mm-1}yy\frac{-mm-1}{mm-1})^2]}}$

$= \dfrac{\frac{1}{2}m \times 4mmydy : (mm-1)}{\sqrt{[1-(\frac{2mm}{mm-1}yy\frac{-mm-1}{mm-1})^2]}}$; donc $\int \dfrac{mmydy}{\sqrt{[(1-yy)\times(mmyy-1)]}}$

$= \frac{1}{2}m \times \int \dfrac{4mmydy : (mm-1)}{\sqrt{[1-(\frac{2mm}{mm-1}yy\frac{-mm-1}{mm-1})^2]}}$, c'eſt-à-dire, $=$ à un arc de cercle pris $\frac{1}{2}m$ fois, dont le rayon $= 1$, & le ſinus droit $= \frac{2mm}{mm-1}yy\frac{-mm-1}{mm-1}$; ſoit appellé cet arc A.

VI. L'autre partie $\dfrac{-dy}{y\sqrt{[(1-yy)\times(mmyy-1)]}}$ s'integre de cette maniére : ſoit diviſé chaque terme par y^3, l'on a

$\dfrac{-dy : y^3}{\sqrt{[(\frac{1}{yy}-1)\times(mm-\frac{1}{yy})]}} = $ (faiſant $\frac{1}{yy} = 2z$)

$\dfrac{dz}{\sqrt{[(2z-1)\times(mm-2z)]}} = \dfrac{dz}{\sqrt{[-mm+(2mm+2).z-4zz]}}$

$= \dfrac{dz}{\sqrt{[(\frac{mm-1}{4})^2-(2z\frac{-mm-1}{2})^2]}} = \dfrac{2dz : (mm-1)}{\sqrt{[1-(\frac{4}{mm-1}z\frac{-mm-1}{mm-1})^2]}}$

$=$ (en ſubſtituant pour $2z$ ſa valeur qui eſt ici $\frac{1}{yy}$)

$\dfrac{-2dy : y^3(mm-1)}{\sqrt{[1-(\frac{2}{(mm-1).yy}\frac{-mm-1}{mm-1})^2]}} = \dfrac{\frac{1}{2}\times -4dy : y^3(mm-1)}{\sqrt{[1-(\frac{2}{(mm-1).yy}\frac{-mm-1}{mm-1})^2]}}$.

Donc $\int \dfrac{-dy}{y\sqrt{[(1-yy)\times(mmyy-1)]}} = \frac{1}{2}\int \dfrac{-4dy : y^3(mm-1)}{\sqrt{[1-(\frac{2}{(mm-1).yy}\frac{-mm-1}{mm-1})^2]}}$;

c'eſt-à-dire $=$ à la moitié d'un arc de cercle dont le rayon $= 1$ & le ſinus droit $= \frac{2}{(mm-1).yy}\frac{-mm-1}{mm-1}$; ſoit appellé cet arc B.

VII. Nous avons donc par les §. 5. & 6. $\frac{1}{2}mA + \frac{1}{2}B$

$= \int \dfrac{mmydy}{\sqrt{[(1-yy)\times(mmyy-1)]}} - \dfrac{dy}{y\sqrt{[(1-yy)\times(mmyy-1)]}}$

$= $ (§. 4.) $\int \dfrac{dy\sqrt{(mmyy-1)}}{y\sqrt{(1-yy}} = \int \dfrac{dy\sqrt{[(nn+1)yy-1]}}{y\sqrt{(1-yy)}} = \int dx$,

ou $mA + B = 2\int dx = 2x$.

VIII. Pour la conſtruction de cette équation, voici comme il s'y faut prendre. Soit SLM encore un grand Cercle de la Sphere dont le rayon $CL = 1$; ſoit pris dedans le ſinus Fig. 5.

& l'arc $LS = B$. Si donc on prend l'arc LM, m fois, & qu'on lui ajoûte l'arc LS, la moitié de la ſomme des deu arcs donnera l'arc cherché x, ou (dans la Fig. 3.) l'arc R pour un y quelconque ou CB.

IX. Pour avoir une équation algébrique entre y & le ſinu de l'arc x qui détermine la nature de la courbe de projectio ABD (*Fig. 3.*) & la courbe algébriquement rectifiable ſur l ſurface ſphérique, il faut choiſir pour m quelque nombr rationel (car on aura différentes courbes ſelon la diverſité d nombre m). On ſçait que le ſinus d'un arc A étant donné, l'o a algébriquement le ſinus d'un arc mA multiple ou ſoumul tiple, & que les ſinus des arcs mA & B étant donnés, l'on algébriquement le ſinus de la ſomme des arcs $mA+B$ & le ſinus de la moitié de cette ſomme. Car faiſant le rayon o ſinus total $= 1$, le ſinus de l'arc $mA = S$, & le ſinus d l'arc $B = T$, l'on trouve le ſinus de la ſomme $mA+B = T$ $\times \sqrt{(1-SS)} + S \times \sqrt{(1-TT)}$.

Ainſi donc ſi l'on appelle v le ſinus de l'arc indéterminé x l'on aura le ſinus de l'arc double $2x = 2v\sqrt{(1-vv)}$ puiſque donc les arcs $mA+B$ & $2x$ doivent être égaux, i faut que leurs ſinus ſoient auſſi égaux ; d'où l'on tirera l'équa tion algébrique entre les fonctions de y & v, qui détermine la nature de la courbe de projection, & la courbe que l'o cherche ſur la ſurface de la Sphere, & qui ſera celle-ci $T\times\sqrt{(1-SS)} + S\times\sqrt{(1-TT)} = 2v\sqrt{(1-vv)}$ S & T étant données par y. Donc, &c. *C. Q. F. T.*

X. *Exemple.* Soit pris le nombre $m = 2$, & par conſé quent $n = \sqrt{(mm-1)} = \sqrt{3}$; l'on aura le ſinus de l'arc A ou $\frac{2mm}{mm-1}yy\frac{-mm-1}{mm-1} = \frac{8yy-5}{3}$, le ſinus de l'arc B, o $\frac{2}{(mm-1).yy}\frac{-mm-1}{mm-1} = \frac{2-5yy}{3yy}$, le ſinus de l'arc mA ou $2A = \frac{16yy-10}{3}\sqrt{(\frac{-16+80yy-64y^4}{9})}$; & partant l

Bernoulli...

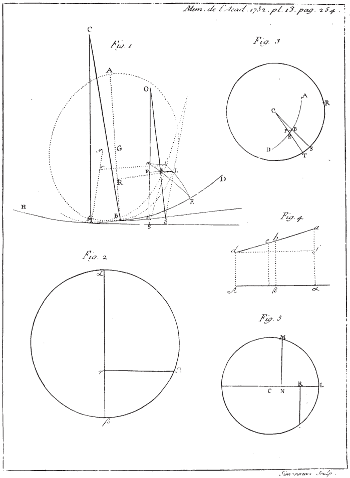
ſinus de la ſomme des arcs $2A + B = \left(\frac{2 - 5yy}{3yy}\right)$ $\times \sqrt{\left[1 - \frac{(16yy - 10)^2 \times (-16 + 80yy - 64y^4)}{81}\right]} + \left(\frac{16yy - 10}{3}\right)$ $\times \sqrt{\left(\frac{-16 + 80yy - 64y^4}{9}\right)} \times \sqrt{\left[1 - \frac{(2 - 5yy)^2}{9y^4}\right]} = 2v\sqrt{(1 - vv)}$, ou parce que la derniére partie du premier membre a deux côtés commenſurables, on peut abreger l'équation de cette maniére $\left(\frac{2 - 5yy}{27yy}\right) \times \sqrt{[81 - (16yy - 10)^2 \times (-16 + 80yy - 64y^4)]} + \left(\frac{32yy - 20}{27yy}\right) \times \sqrt{(-4 + 20yy - 16y^4)} = 2v\sqrt{(1 - vv)}$, & cette équation eſt celle qui exprime la nature de la courbe de projection, de tous les points de laquelle ſi l'on éleve les droites $= \sqrt{(1 - yy)}$ perpendiculaires au plan ſur lequel elle eſt décrite, ces perpendiculaires rencontreront la ſuperficie de la ſphere dans les points de la courbe qu'on cherche, qui ſera algébriquement rectifiable, auſſi-bien que ſa projettée ; car la différence de la hauteur de deux perpendiculaires dont chacune eſt exprimée par ſon $\sqrt{(1 - yy)}$, eſt à l'arc de la courbe de projection intercepté entre ces deux hauteurs, comme 1 à n, c'eſt-à-dire [à cauſe de $n = \sqrt{(mm - 1)}$] comme 1 à $\sqrt{3}$; & cette même différence de hauteurs eſt à l'arc de la courbe décrite ſur la ſuperficie ſphérique, intercepté entr'elles comme 1 à $\sqrt{(1 + nn)}$, c'eſt-à-dire, dans cet exemple comme 1 à 2. Ainſi chaque arc de la projettée eſt à ſon arc correſpondant ſur la ſuperficie ſphérique, comme $\sqrt{3}$ à 2, ou comme la hauteur du triangle équilatéral à ſon côté. L'on aura donc entre l'arc ſur la ſuperfice ſphérique, l'arc correſpondant de la projection & la différence des hauteurs perpendiculaires, les rapports qui ſont entre 2 . $\sqrt{3}$. & 1.

Scholie. L'on voit par-là que les courbes que nous venons de trouver par la méthode analytique, ſont les mêmes que les Epicycloïdes ſphériques, décrites par un grand cercle de la ſphere qui tourne ſur un petit ; car j'ai fait voir dans le §. 16. des Epicycloïdes ſphériques, que ces ſortes d'Epicycloïdes ont chacun de leurs arcs aux arcs correſpondans de la courbe

I i iij

la ſphere une courbe dont la longueur ait une raiſon donnée à la longueur de ſa projettée, par exemple, de 2 à $\sqrt{3}$, il faut ſeulement pour le cercle immobile, prendre celui qui fait avec un grand cercle mobile, un angle d'inclinaiſon, tel que 1 à g ſoit dans le rapport de 2 à $\sqrt{3}$, ou de 1 à $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Or c'eſt l'angle que forment deux côtés d'un triangle équilatéral, ſçavoir, $\frac{2}{3}$ d'un angle droit, ou l'angle de 60 degrés. Concevons donc dans la ſphere, un Tropique éloigné de l'Equateur de 60 degrés, & faiſant tourner ſur lui l'Ecliptique, un point pris dans ſa circonférence décrira la courbe qu'on cherche, qui ſatisfait à cette prolixe équation que nous avons trouvée ci-deſſus $\left(\frac{2 - 5yy}{27yy}\right) \times \sqrt{[81 - (16yy - 10)^2} \times$ &c.] $+ \left(\frac{32yy - 20}{27yy}\right) \times \sqrt{(-4 +}$ &c.$) = 2v\sqrt{(1 - vv)}$. Et il paroît preſque incroyable qu'on puiſſe conſtruire une équation ſi compoſée par un mouvement ſi ſimple.

Au reſte, l'on voit que dans cette ſuppoſition, l'Ecliptique ſera double du Tropique, & que par conſéquent il devra le parcourir deux fois, avant que le point décrivant revienne au point d'où il eſt parti ; & la longueur de la demi Epicycloïde ſera double de la plus grande hauteur ou de la diſtance entre les Tropiques, & par conſéquent la longueur de l'Epicycloïde entiére ſera égale à quatre fois cette diſtance. Cette courbe (comme il eſt facile de le voir par la maniére dont elle ſe produit) a quatre parties ſemblables & égales terminées aux quatre points qu'on appelle *Cardinaux* ; la 1.re compriſe entre le point du Solſtice d'Hiver (ſi l'on ſuppoſe que la rotation de l'Ecliptique ſe fait d'Orient en Occident) & le point équinoxial d'Automne; la 2.me entre ce point, & le Solſtice d'Eté ; la 3.me entre le Solſtice d'Eté & l'Equinoxe du Printemps ; la 4.me enfin entre l'Equinoxe du Printemps & le Solſtice d'Hiver : & ainſi la longueur de chacune de ces parties eſt égale à l'intervalle entre les



Tropiques, c'eſt-à-dire, à la corde de 120 degrés; en ſuppoſant toûjours, comme nous avons fait dans cet exemple, le Tropique éloigné de l'Equateur de 60 degrés.

Cet Exemple qui paroît le moins compliqué de tous, me fait tellement craindre les autres, qui, ſans doute, demanderoient un travail immenſe, pour trouver l'équation algébrique des courbes de projection, que j'aime mieux les laiſſer chercher à d'autres. Il me ſuffit d'avoir trouvé la méthode, & de l'avoir indiquée.

SOLUTION
DU MESME PROBLEME,
Et de quelques autres de cette eſpece.

Par M. DE MAUPERTUIS.

CES deux Pieces m'ont été envoyées en Latin, par M. Bernoulli, & contiennent la Solution la plus complette du Probleme de M. Offenburg. Parmi les Epicycloïdes ſphériques, il s'en trouve qui ſont rectifiables & algébriques en même temps, & ces courbes ſatisfont au Probleme, mais c'eſt par une eſpece de haſard. M. Bernoulli, dans la 2.me Piece, recherche à priori les courbes rectifiables & algébriques ſur la ſurface de la ſphere, & c'eſt-là qu'il donne la vraye Solution du Probleme. Il m'avoit écrit qu'il avoit trouvé ces courbes par une méthode directe, & m'invitoit à les chercher. Je ne me flattai pas aiſément de trouver des choſes qu'il avoit jugées dignes de ſon application, & je le priai de me communiquer ſa Solution. Cependant l'idée qui eſt le principe commun de ſa Solution & de la mienne, m'étant venuë dans l'eſprit, & ayant auſſi-tôt trouvé ces courbes, je lui envoyai ma Solution que j'avois fait voir quelques jours auparavant